Corrigé

EPITA / S1# **Mai 2018**

NOM : .... PRENOM : ....

Contrôle de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

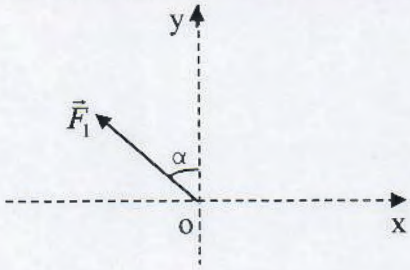
QCM (5 points ; pas de points négatifs)

Entourer la bonne réponse

1- La norme de la résultante $\vec{R}$ de deux vecteurs forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ (non nuls) et orthogonaux est

a) $R = 0$ b) $R = |F_1 - F_2|$ c) $R = F_1 + F_2$ d) $R = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2}}$

2- Les composantes du vecteur force $\vec{F_1}$ sur le schéma ci-dessous sont :



a) $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} F_1.\sin(\alpha) \\ -F_1.\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ b) $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -F_1.\sin(\alpha) \\ F_1.\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ c) $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -F_1.\cos(\alpha) \\ F_1.\sin(\alpha) \end{pmatrix}$

3- Le produit scalaire entre deux vecteurs colinéaires et de sens opposé est

a) strictement négatif b) nul c) strictement positif

4- Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est

a) $\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$ b) $\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix}$ c) $\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 12 \end{pmatrix}$

5- Le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

a) $\vec{V} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ b) $\vec{V} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ c) $\vec{V} = \rho.\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

6- Le vecteur accélération en coordonnées polaires est donné par

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R, le vecteur accélération s'écrit

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ R.\ddot{\theta} \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ R.\ddot{\theta} \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} R(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

7- Dans la base de Frenet le vecteur vitesse s'écrit :

a) $\vec{V} = R(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_N$ b) $\vec{V} = R(t)\ddot{\theta}\vec{u}_T$ c) $\vec{V} = R(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_T$

8- Le vecteur accélération en base de Frenet $\vec{a}$ s'écrit

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_T = \dfrac{dV}{dt} \\ a_N = \dfrac{V^2}{R^2} \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_T = \dfrac{d\rho}{dt} \\ a_N = \dfrac{V^2}{R} \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_T = \dfrac{dV}{dt} \\ a_N = \dfrac{V^2}{R} \end{pmatrix}$

Exercice 1 (6 points)

Les équations horaires dans le plan (xoy) d'un point matériel sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = 2a.\cos(\omega t) \\ y(t) = a\sin(\omega t) \end{cases}$$ (a et ω sont des constantes positives).

1- a) Montrer que la trajectoire de ce point matériel est elliptique. On rappelle l'équation analytique d'une ellipse de centre 0, de demis-axes A et B : $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$ (A et B sont des constantes positives).

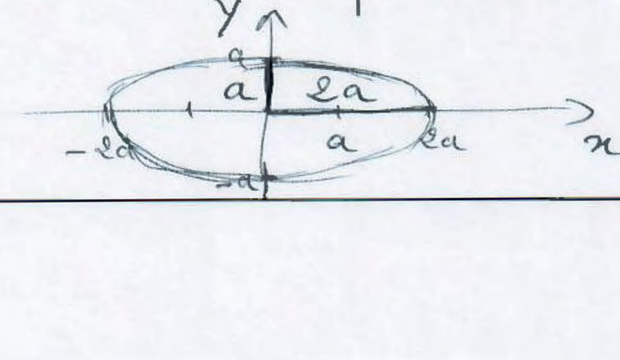
b) Identifier les constantes A et B en fonction de a.

1a) $\begin{cases} x(t) = 2a\cos(wt) \Rightarrow \dfrac{x}{2a} = \cos(wt) \quad (1) \\ y(t) = a\sin(wt) \Rightarrow \dfrac{y}{a} = \sin(wt) \quad (2) \end{cases}$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \underbrace{\cos^2(wt) + \sin^2(wt)}_{=1\ \forall t}$

b) on a bien une trajectoire elliptique.
de $A = 2a$ et $B = a$.

2a est le demi-grand axe de l'ellipse.
a " " petit axe de "



2-Exprimer le vecteur vitesse, en déduire la norme de ce vecteur.

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x}(t) = -2a\omega \sin(\omega t). \\ \dot{y}(t) = a\omega \cos(\omega t). \end{cases}$$

norme $\quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\omega \sqrt{4\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}$.

$$v = a\omega . \sqrt{3\sin^2(\omega t) + \underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{=1}}$$

$$v = a\omega \sqrt{3\sin^2(\omega t) + 1}.$$

3- Même question pour le vecteur accélération.

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -2a\omega^2 \cos(\omega t). \\ a_y = \ddot{y} = -a\omega^2 \sin(\omega t). \end{cases}$$

norme $\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a\omega^2 \sqrt{4\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$

$$a = a\omega^2 \sqrt{3\cos^2(\omega t) + 1}.$$

Exercice 2 (sur 9 points)

Partie A Coordonnées cartésiennes

Un point matériel M est repéré dans par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) telles que :

$$\begin{cases} x(t) = R.\cos(\omega .t) \\ y(t) = R.\sin(\omega .t) \\ z(t) = H.\omega .t \end{cases}$$ Où R, ω et H sont des constantes positives.

1- Exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Calculer sa norme.

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) = R\omega \cos(\omega t) \\ \dot{z} = H\omega = cste. \end{cases}$$

Norme $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

$$v = \omega\sqrt{R^2 \sin^2(\omega t) + R^2\cos^2(\omega t) + H^2}$$

$$= \omega\sqrt{R^2\underbrace{(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}_{=1} + H^2} = \omega\sqrt{R^2 + H^2}.$$

2- Exprimer le vecteur accélération du point M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .Calculer sa norme.

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y = -R\omega^2 \sin^2(\omega t). \\ a_z = 0 \quad \text{car } v_z = cste. \end{cases}$$

Norme : $a = \sqrt{R^2\omega^4\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)}$.

$a = R\omega^2$

3- a) Quel est le mouvement du point M dans le plan (**xOy**) ? Justifier votre réponse en donnant l'équation de la trajectoire dans le plan (xoy).

a) dans le plan (xoy)

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \Rightarrow \dfrac{x^2}{R^2} = \cos^2(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \Rightarrow \dfrac{y^2}{R^2} = \sin^2(\omega t). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{R^2} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$ (mvt circulaire de centre O et de rayon R)

b) Quel est le mouvement du point M suivant la direction de l'axe **Oz** ? Justifier votre réponse.

Sur $\vec{Oz}$ $z = H\omega t$ et $v_z = cste$.

il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme sur l'axe $\vec{Oz}$.

Partie B Coordonnées cylindriques

On utilise les équations horaires données dans la partie A.

1- Exprimer le vecteur position dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Utiliser les équations de passage.

$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$ avec $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = R$.

$z_{cyl} = z_{cartés}$

$\vec{OM} = \underbrace{R}_{\rho} \vec{u}_\rho + \underbrace{(H\omega t)}_{z(t)} \vec{u}_z$

Eqts de passage :
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$\theta = \text{Artan}\left(\frac{y}{x}\right)$

2- Exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + H\omega \vec{u}_z$.

$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta + H\omega \vec{u}_z$ avec $\theta(t) = \text{Artan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\theta(t) = \omega . t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega$. $\left(\dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta} \vec{u}_\theta\right)$.

d'où $\boxed{\vec{v} = \underbrace{(R\omega)}_{v_\theta} \vec{u}_\theta + \underbrace{(H\omega)}_{v_z} \vec{u}_z}$.

3- Exprimer le vecteur accélération du point M dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega \underbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}}_{-\dot{\theta}\vec{u}_\rho = -\omega \vec{u}_\rho} + 0\vec{u}_z + H\omega \underbrace{\dot{\vec{u}}_z}_{= \vec{0}}$.

$\boxed{\vec{a} = \underbrace{-R\omega^2}_{a_\rho} \vec{u}_\rho .}$

l'accélération est radiale et orienté vers le centre O