EPITA

Mathématiques

Examen S1B1 OBM

durée : 2 heures 30

Octobre 2024

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par division par 2.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : logique (10 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la condition P : « $x^2 > 4$ ». On dresse une liste de 5 propositions :

   (1) « $x > -2$ », **(2)** « $x < -10$ », **(3)** « $x > 1,9$ », **(4)** « $x < -3$ ou $x > 3$ » et **(5)** « $x < -2$ ou $x > 2$ »

   (a) Donner la liste des implications du type « .... $\Longrightarrow$ P » qui sont vraies.

   ....
   ....

   (b) Donner la liste des implications du type « P $\Longrightarrow$ .... » qui sont vraies.

   ....
   ....

   (c) Pour chacune des implications vraies du 1.(b), donner leur négation.

   ....
   ....

2. On considère les assertions :

   P : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \cos(x) = y$ », Q : « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x = \cos(y)$ » et R : « $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \cos(x) < \cos(y)$ »

   (a) P, Q et R sont-elles vraies ? Justifier dans tous les cas.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Donner la négation de P, de Q et de R.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Raisonnement par contraposée : soient A et B deux assertions.
   (a) Écrire la contraposée de $A \Longrightarrow B$.

   ....

   (b) Montrer que $A \Longrightarrow B$ et sa contraposée sont équivalentes.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) Application : soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposée que : $(\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$. Vous prendrez soin de votre rédaction et vous écrirez clairement la contraposée dans ce cas là.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (d) La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....

4. Soient $A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\big\}$ et $B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0\big\}$.
   (a) De quel ensemble A et B sont-ils des sous-ensembles ?

   ....

   (b) Montrer soigneusement que $A \subset B$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) A-t-on $B \subset A$? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : ensembles et fonctions 1 (7 points)

1. Soient A et B deux ensembles, $f : A \longrightarrow B$, $I \subset A$ et $J \subset B$.

   Rappeler la définition mathématique de $f(I)$ et $f^{-1}(J)$.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. Soient $E = \{2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$

   (a) Remplir ci-dessous le tableau de valeurs de la fonction f :

(x, y)	
$f((x, y))$	

   (b) Déterminer $f(E \times F)$, $f(\{(2, 2), (4, 3)\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{6\})$.

   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) Écrire la définition mathématique de : « f injective de $E \times F$ vers $\mathbb{N}$ ». f est-elle injective ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (d) Écrire la définition mathématique de : « f surjective de $E \times F$ vers $\mathbb{N}$ ». f est-elle surjective ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (e) Déterminer $I \subset E \times F$ et $J \subset \mathbb{N}$ tels que $f : I \longrightarrow J$ soit injective, non surjective. (Les ensembles I et J doivent contenir au moins deux éléments).

   ....
   ....
   ....
   ....

(f) Déterminer $I' \subset E \times F$ et $J' \subset \mathbb{N}$ tels que $f : I' \longrightarrow J'$ soit surjective, non injective. (Les ensembles I' et J' doivent contenir au moins deux éléments).

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 3 : ensembles et fonctions 2 (3 points)

Compléter le tableau suivant.

N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon ! Bien sûr, la fonction exp est la fonction $x \mapsto e^x$ et la fonction cos est $x \mapsto \cos(x)$.

f	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$\cos : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(\{0\})$		
$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$		
$f^{-1}(\{0\})$		
$f^{-1}(\{-1\})$		
$f^{-1}(\,]-\infty, 0])$		

Exercice 4 : relations (4 points)

Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \,\mathcal{R}\, b \iff |a| \leq |b|$.

1. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est réflexive. Justifier.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est symétrique. Justifier.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est antisymétrique. Justifier.

4. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est transitive. Justifier.

Exercice 5 : intégrales (6 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer directement avec une primitive : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+2}{2x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x$.

2. Via une intégration par parties, calculer $J = \displaystyle\int_0^{\pi} (x+1)\cos\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x$. Vous poserez clairement les fonctions u, u', v et v' et vous mettrez en évidence la formule.

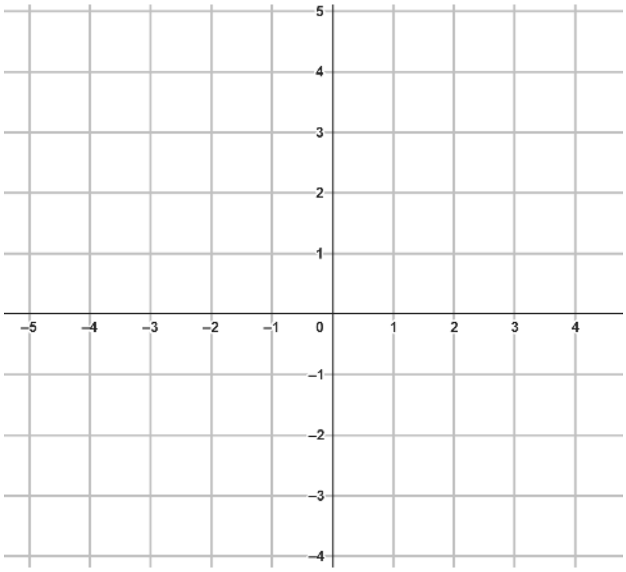
3. Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+x^2} \mathrm{d}x$ en posant $t = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Exercice 6 : nombres complexes (10 points)

Partie 1 : questions de cours

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib$.

1. Le nombre imaginaire i vérifie :
2. L'écriture $z = a + ib$ est l'écriture de z.
3. L'ensemble des nombres complexes se note :
4. Le conjugué de z est (en fonction de a et b) :
5. Le module de z est égal à (en fonction de a et b) :
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. On a (en fonction de a et b) : $\cos(\theta) =$ et $\sin(\theta) =$
7. L'écriture trigonométrique de z est :
8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $e^{i\theta} =$
9. Sur le dessin ci-dessous, placer le point M d'affixe $z = -4 + 3i$. Indiquer graphiquement son module et un argument.



Partie 2 : exercices types (Ils sont indépendants)

1. Donner la forme algébrique de $z = (3 - i)(2 - 4i)$

....
....

2. Soient $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Donner $|z_1|$, $|z_2|$ et $|z_1 \times \overline{z_2}|$.

....
....

3. Donner la forme trigonométrique ou exponentielle de $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et z_2^3.

....
....
....
....
....
....

[Tournez la page. Il reste une question !]

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....