EPITA

Mathématiques

Examen S1B1 DP

durée : 2 heures

Octobre 2024

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à 20 par division par 2.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : autour du cours et du TD (4 points)

Dans un jeu de 32 cartes, **on tire 5 cartes**.

Proposer une situation **simple** afin que la réponse à la question « Quel est le nombre de tirages possibles ? » soit :

1. « Il y a $\dfrac{32!}{27!}$ tirages possibles ».

   ....
   ....
   ....

2. « Il y a $\dbinom{32}{5}$ tirages possibles ».

   ....
   ....
   ....

3. « Il y a $\dbinom{8}{3} \times \dbinom{8}{2}$ tirages possibles ».

   ....
   ....
   ....

4. « Il y a $\dbinom{7}{1} \times \dbinom{24}{3}$ tirages possibles ».

   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : dénombrement 1 (6 points)

Un digicode à l'entrée d'un immeuble est constitué d'un clavier de 13 touches marquées de 3 lettres A, B et C et des dix chiffres de 0 à 9.

Un code est formé d'une lettre suivie de 3 chiffres.

N.B. : vous donnerez vos résultats sous la forme d'un nombre entier.

1. Combien y a-t-il de codes possibles dont les chiffres sont distincts ? Justifier brièvement.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Combien y a-t-il de codes possibles dont les chiffres peuvent se répéter ? Justifier brièvement.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Paul arrive devant l'immeuble mais a oublié le code. Il se souvient juste de la lettre et sait que les chiffres sont distincts et impairs. Combien a-t-il de possibilités pour trouver le code ? Justifier brièvement.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. Le lendemain, Paul revient mais le code a changé y compris la lettre. On lui a précisé uniquement que les trois chiffres du code sont 6, 2 et 9. Combien a-t-il de possibilités pour trouver le code ? Justifier brièvement.

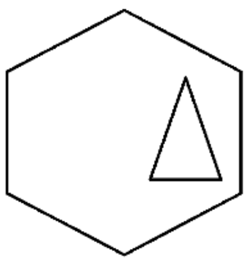
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. Le surlendemain, Paul veut à nouveau rentrer chez lui mais le code a une nouvelle fois changé (y compris la lettre). Cette fois-ci, il sait juste que les chiffres du code peuvent se répéter et qu'il y a au moins une fois le chiffre 4. Combien a-t-il de possibilités pour trouver le code ? Justifier brièvement.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 3 : dénombrement 2 (8,5 points)

1. Teddy s'ennuie et cherche à s'occuper. Il découpe un hexagone et un triangle en papier et colle le triangle dans l'hexagone comme dans la figure suivante.

   Teddy trouve alors 9 jetons numérotés de 1 à 9 et se lance le défi de placer 5 jetons dans l'hexagone dont 2 dans le triangle.

   Pour cela, il décide procéder de deux façons différentes :

   • **Choix 1** : Teddy choisit 2 jetons à mettre dans le triangle puis il choisit 3 jetons à placer en dehors du triangle (mais dans l'hexagone !)

   • **Choix 2** : Teddy choisit 5 jetons à placer dans l'hexagone et choisit parmi ceux-ci 2 jetons à placer dans le triangle.

(a) Quel est le nombre N_1 de répartitions possibles si Teddy fait le choix 1 ? Vous donnerez votre résultat sous la forme de produits d'entiers.

(b) Quel est le nombre N_2 de répartitions possibles si Teddy fait le choix 2 ? Vous donnerez votre résultat sous la forme de produits d'entiers.

(c) Que constatez-vous ?

2. Généralisation : soient 3 entiers naturels n, p et k tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. En vous inspirant des choix faits par Teddy, expliquez, sans calcul, la formule suivante :

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

3. Redémontrer la formule précédente par le calcul.

4. Donner la valeur de : $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

....
....
....
....

Exercice 4 : probabilités conditionnelles (6,5 points)

Dans une promotion d'élèves à Epita, on considère que seuls 40% apprennent leur cours de maths. Pour ceux qui apprennent le cours, la probabilité de valider l'année est de 80%. Pour les autres, celle-ci tombe à 20%. On note C l'événement « apprendre son cours » et V l'événement « valider l'année ». Vous donnerez les résultats sous forme de fraction simplifiée.

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilités.

....
....
....

2. On choisit un élève au hasard, quelle est sa probabilité de valider ?

....
....
....
....
....
....
....
....

3. On choisit un élève qui valide l'année, au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait appris son cours ?

....
....
....
....

4. Quelle proportion minimale p d'élèves qui apprennent leur cours faudrait-il pour que 60% de la promotion valide ?

....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5 : cours (6 points)

Soient X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de X respectivement notées : $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2. Exprimer $E(aX + b)$ en fonction de a, b et $E(X)$. Démontrer cette formule.

3. Exprimer $\mathrm{Var}(aX + b)$ en fonction de a, b et $\mathrm{Var}(X)$. Démontrer cette formule.

Exercice 6 : variables aléatoires (9 points)

Dans une urne, il y a quatre boules, indiscernables au toucher, numérotées 0, 1, 1 et 2.
On tire au hasard successivement et avec remise 20 boules de l'urne. Les tirages sont indépendants.

N.B. : tous vos résultats seront donnés sous la forme d'une fraction simplifiée.

1. Soit $k \in [\![1, 20]\!]$ fixé. On note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

   (a) Donner la loi de chaque X_k.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Calculer l'espérance de X_k (vous détaillerez vos calculs).

   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) Calculer la variance de X_k (vous détaillerez vos calculs).

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Pour chaque tirage, on gagne un euro si la boule tirée porte le numéro 0 ou 1, sinon on ne gagne rien. On considère Y_k la variable aléatoire égale au gain obtenu au k-ième tirage ($k \in [\![1, n]\!]$ fixé).

   (a) Donner la loi de Y_k. Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

(b) Donner son espérance et sa variance.

3. Soit Z la variable aléatoire égale au gain obtenu sur les 20 tirages.

(a) Écrire Z en fonction des Y_k en expliquant brièvement.

(b) En déduire, pour tout $i \in Z(\Omega)$, $P(Z = i)$. Justifier.

(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=0}^{20} P(Z = i) = 1$.

(d) Calculer $E(Z)$ et $\text{Var}(Z)$ en justifiant.