Correction S1PA B1 SR

Exercice 1 : en vrac

1. *Soit (u_n) une suite.*

   (a) *Rappeler la définition (avec les quantificateurs) de « (u_n) est croissante »*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$$

   (b) *Que signifie « (u_n) est monotone » ?*

   Cela signifie que (u_n) est croissante ou décroissante, c'est-à-dire :

   $$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}) \vee (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n)$$

   (c) *Étudier la monotonie de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-2n+3}{n+1}$*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+3}{n+2} - \frac{-2n+3}{n+1} = \frac{-2n+1}{n+2} - \frac{-2n+3}{n+1} \\ &= \frac{(-2n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(-2n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-5}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

2. *Soit $S = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{12}$. Écrire S à l'aide du symbole $\sum$. Calculer S.*

$$S = \sum_{k=2}^{12} 3^k = 3^2 \times \frac{1-3^{11}}{1-3} = -\frac{9}{2}\left(1-3^{11}\right) = \frac{9}{2}\left(3^{11}-1\right)$$

Exercice 2 : limite de suites

Dans cet exercice, vous prendrez soin de votre rédaction.

1. *Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + n^2 - 6e^{-n}$.*

   $$-3n^3 + n^2 - 6e^{-n} = -3n^3\left(1 - \frac{1}{3n}\right) - 6e^{-n}$$

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{3n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 6e^{-n} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + n^2 - 6e^{-n} = -\infty$.

2. *Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$*

   $$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+1/n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 2/n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$

3. *Trouver* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n+n}{n+1}$

$$\frac{e^n+n}{n+1} = \frac{e^n\left(1+\dfrac{n}{e^n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{e^n}{n} \times \frac{1+\dfrac{n}{e^n}}{1+\dfrac{1}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$ par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n+n}{n+1} = +\infty$.

4. *Trouver* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 4^n$

$$2^n - 4^n = 4^n\left(\frac{2^n}{4^n} - 1\right) = 4^n\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n - 1\right) = 4^n\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (limite de q^n avec $q > 1$), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 4^n = -\infty$

Exercice 3 : limite et comparaison

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2 + (-1)^n \times n$.

1. *Montrer (sans récurrence) que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2+n+1 \leq u_n$.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $-1 \leq (-1)^n$. D'où $-n \leq (-1)^n \times n$. Ainsi, $(n+1)^2 - n \leq u_n$. Comme $(n+1)^2 - n = n^2+n+1$, on obtient l'inégalité demandée.

2. *En déduire le comportement de (u_n) en $+\infty$.*

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n+1 = +\infty$. Donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 : étude d'une suite

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

1. *Étudier la monotonie de la suite (u_n).*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Or
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1 \text{ car } n+1 \geq 2$$
   D'où, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

2. *Peut-on en déduire le comportement de (un) en $+\infty$? Justifier*

   (u_n) est décroissante et positive, d'où (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit donc qu'elle converge.

3. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $2 \times 3^{n-2} \leq n!$*

   • Initialisation $n = 2$. On a $2 \times 3^{2-2} = 2 \times 1 = 2$ et $2! = 2$. La propriété est donc vraie au rang 2.

   • Supposons que pour un certain entier $n \geq 2$, la propriété soit vraie au rang n. On a
   $$(n+1)! = n!\,(n+1) \geq 2 \times 3^{n-2} \times (n+1) \text{ car la propriété au rang n est vraie}$$
   Comme $n \geq 2$, $n+1 \geq 3$. Ainsi, $(n+1)! \geq 2 \times 3^{n-2} \times 3 = 2 \times 3^{n-1}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

   •. En conclusion, $\forall\, n \geq 2$, $2 \times 3^{n-2} \leq n!$

4. *En déduire la limite de la suite (u_n)* en $+\infty$.

   En inversant l'inégalité précédente, on a $\dfrac{1}{2 \times 3^{n-2}} \geq \dfrac{1}{n!}$. Ainsi, $\dfrac{2^n}{2 \times 3^{n-2}} \geq u_n$.

   On en déduit donc que $0 \leq u_n \leq \dfrac{9}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Comme $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.