# Correction S1PA B1 FCT

## Exercice 1 : calculs de limites

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{xe^{-x}+1} - \dfrac{e^{-2x}}{(x+2)^4}$ *en justifiant proprement.*

   Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)^4 = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{xe^{-x}+1} - \dfrac{e^{-2x}}{(x+2)^4} = \sqrt{1} = 1$.

2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \cos(\sqrt{x})$ *en justifiant proprement.*

   On sait que pour tout réel $x$, $-1 \leq \cos(\sqrt{x}) \leq 1$. Ainsi, $x^2 - 1 \leq x^2 + \cos(\sqrt{x})$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$, on en déduit par théorème de comparaison que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \cos(\sqrt{x}) = +\infty$.

3. *Soit* $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x+2}$. *Calculer la limite de* $f$ *en* $+\infty$, *en* $(-2)^-$ *et* $(-2)^+$ *en justifiant proprement. Peut-on en déduire des asymptotes à la courbe représentative de* $f$ *? Si oui, donner leurs équations.*

   - En $+\infty$.
     On a $f(x) = \dfrac{x\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote en $+\infty$.

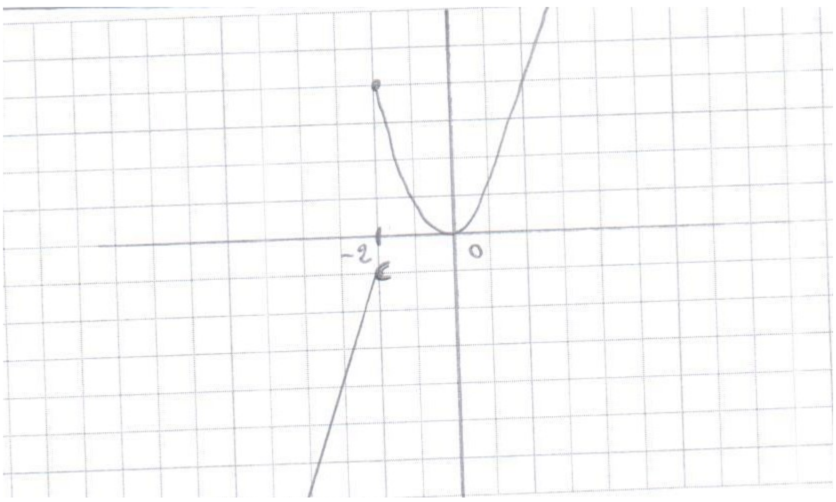
   - En $(-2)^-$
     Comme $\lim\limits_{x\to(-2)^-} 2x - 1 = -5$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-} x + 2 = 0^-$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme asymptote en $(-2)^-$.

   - En $(-2)^+$
     Comme $\lim\limits_{x\to(-2)^+} 2x - 1 = -5$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} x + 2 = 0^+$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme asymptote en $(-2)^+$.

## Exercice 2 : continuité

*Soit la fonction* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = 3x+5 & \text{si } x < -2 \\ f(x) = 4 & \text{si } x = -2 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

1. *Tracer la courbe représentative de la fonction* $f$ *et conjecturer la continuité de* $f$ *sur* $\mathbb{R}$.



Ma conjecture est : la fonction est continue à droite en $-2$ mais n'y est pas continue à gauche. Elle est continue aussi sur $]-\infty,-2[$ et $]-2,+\infty[$.

2. *Démontrer proprement votre conjecture.*

   - $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} 3x+5 = -1 \neq f(-2)$. Donc $f$ n'est pas continue en $(-2)^-$.
   - $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} x^2 = 4 = f(-2)$. Donc $f$ est continue en $(-2)^+$.
   - Sur $]-\infty,-2[$ ou sur $]-2,+\infty[$, $f$ est continue en tant que fonctions usuelles continues.

# Exercice 3 : dérivées

*Sans se soucier des domaines de définitions, dériver*

1. $f : x \longmapsto 2xe^{-x^3}$

   $f'(x) = 2e^{-x^3} + 2x \times (-3x^2)e^{-x^3} = e^{-x^3}(2-6x^3)$

2. $g : x \longmapsto \sqrt{6x^4+x^2+1}$

   $g'(x) = \dfrac{24x^3+2x}{2\sqrt{6x^4+x^2+1}} = \dfrac{12x^3+x}{\sqrt{6x^4+x^2+1}}$

3. $h : x \longmapsto \cos^4(x) + \tan(2x)$

   $h'(x) = 4\cos^3(x) \times (-\sin(x)) + (1+\tan^2(2x)) \times 2.$

# Exercice 4 : étude de fonction complète

*On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.*
*On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.*

1. Montrer que $f$ est paire.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$. Donc $f$ est paire.

2. *Trouver $f'$ et étudier son signe sur $[0,+\infty[$.*

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) \leq 0$.

3. Faire le tableau (complet) de variations de $f$ sur $[0,+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

4. *En déduire les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_f$.*

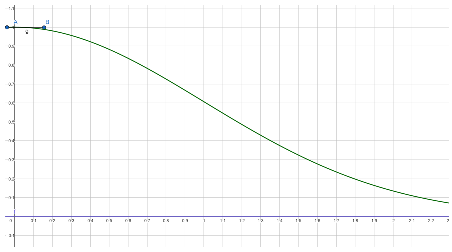
   Du tableau, on en déduit que la droite d'équation $y=0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

5. *Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?*

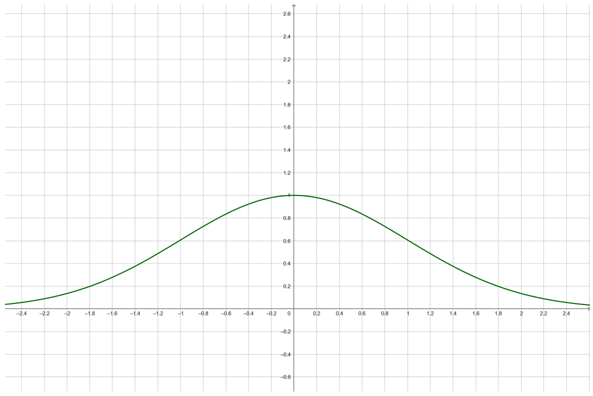
   On sait qu'elle a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0) = 0(x-0)+1 = 1$. On a donc une tangente horizontale en 0.

6. *Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}$. Vous ferez apparaitre les asymptotes et tangentes.*

Sur $\mathbb{R}^+$ :



Sur $\mathbb{R}$, en utilisant la parité, on sait que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie.



# Exercice 5 : fonctions trigonométriques

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{2} - \dfrac{\cos(x)}{2}$.

1. *Montrer que $f$ est paire et $2\pi$-périodique.*

   Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \dfrac{\sin^2(-x)}{2} - \dfrac{\cos(-x)}{2} = \dfrac{(-\sin(x))^2}{2} - \dfrac{\cos(x)}{2} = \dfrac{\sin^2(x)}{2} - \dfrac{\cos(x)}{2} = f(x)$. $f$ est donc paire.

   De plus, $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin^2(x+2\pi)}{2} - \dfrac{\cos(x+2\pi)}{2} = \dfrac{\sin^2(x)}{2} - \dfrac{\cos(x)}{2} = f(x)$. $f$ est $2\pi$ périodique.

2. *Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

   $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. $f$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

3. *On se donne le tableau (incomplet) des variations de $f$ sur $[0, \pi]$ :*
   **Compléter ce tableau en faisant les calculs dans l'espace ci-dessous**

   | $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
   |---|---|---|---|---|---|
   | $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

   On a $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, $f(\pi) = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} - \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$.

4. Justifier proprement que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha$ dans $[0, \pi]$. Donner un intervalle de la forme $]a, b[$ strictement inclus dans $[0, \pi]$ tel que $\alpha \in ]a, b[$ en précisant les valeurs de $a$ et de $b$.

   $f$ est continue sur $[0, \pi]$, $f(0) < 0$ et $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) > 0$. On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\, \alpha \in ]0, \dfrac{2\pi}{3}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

5. *À votre avis, l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ ? Justifier.*

   $f$ étant $2\pi$-périodique et paire, elle s'annule une infinité de fois.