EPITA

Mathématiques

Examen S1B1-LE

durée : 1 heure

Octobre 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 20 points

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 4 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : équation du second degré (2 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2\sqrt{3}z + 2 = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux solutions trouvées.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Donner la forme exponentielle de z_1 et de z_2.

   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : logique (6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Traduire les phrases suivantes en syntaxe mathématique (avec les quantificateurs)
   (a) « La fonction f s'annule au moins une fois »

   ....

   (b) « La fonction f est constante »

   ....

   (c) « La fonction f est majorée »

   ....

2. On considère les assertions :
   P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ », Q : « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » et R : « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$ »
   (a) Donner la négation de P, de Q et de R.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Cocher dans le tableau suivant les implications vraies :

$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$Q \Longrightarrow R$	$\neg(Q) \Longrightarrow \neg(P)$	$\neg(P) \Longrightarrow \neg(R)$

Exercice 3 : ensembles et fonctions (8 points)

1. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Rappeler la définition mathématique des ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. Dessiner (graphe, patate) une fonction $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow [\![1, 5]\!]$ qui vérifie à la fois $f(\{a, b\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{b, c\}$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| \end{array} \right.$

   (a) Dessiner le graphe de g.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Donner $g(\{-1, 2\})$, $g([-1, 3])$, $g^{-1}(\{1\})$ et $g^{-1}([0, 1])$.

   ....
   ....
   ....

   (c) g est-elle injective ? Justifier. Si non, proposer deux intervalles I_1 et J_1 pour lesquels $g : I_1 \longrightarrow J_1$ soit injective.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (d) g est-elle surjective ? Justifier. Si non, proposer deux intervalles I_2 et J_2 pour lesquels $g : I_2 \longrightarrow J_2$ soit surjective.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 4 : relations (4 points)

Dans $E = \mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall\,(a,b) \in E^2, a\,\mathcal{R}\,b \iff \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $b = a^n$.

1. Dire si $\mathcal{R}$ est réflexive. Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Dire si $\mathcal{R}$ est symétrique. Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Dire si $\mathcal{R}$ est transitive. Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. Soit $(a,b) \in E^2$ tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$.

   (a) Montrer qu'il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b = b^{np}$.

   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) En déduire que $b = 1$ ou que $n = p = 1$. Qu'avez-vous finalement démontré ?

   ....
   ....
   ....
   ....