Correction S1B1 LE

Exercice 1 : équation du second degré

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2\sqrt{3}z + 2 = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux solutions trouvées.*

   On a $\Delta = -4$. Ainsi, $z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} + 2i}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

2. *Donner la forme exponentielle de z_1 et de z_2.*

   $|z_1| = |z_2| = 1$. $z_1 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$ et $z_1 = e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

Exercice 2 : logique

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. *Traduire les phrases suivantes en syntaxe mathématique (avec les quantificateurs)*

   (a) « La fonction f s'annule au moins une fois »

   $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

   (b) « La fonction f est constante »

   $\exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$

   (c) « La fonction f est majorée »

   $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$

2. *On considère les assertions :*
   P : « $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ », Q : « $\exists\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ » et R : « $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \vee (\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$ »

   (a) *Donner la négation de P, de Q et de R.*

   $\neg(P) =$« $\exists\, x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ »

   $\neg(Q) =$ « $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ »

   $\neg(R) =$« $(\exists\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0) \wedge (\exists\, x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ »

   (b) *Cocher dans le tableau suivant les implications vraies :*

$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$Q \Longrightarrow R$	$\neg(Q) \Longrightarrow \neg(P)$	$\neg(P) \Longrightarrow \neg(R)$
X			X	

Exercice 3 : ensembles et fonctions

1. *Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Rappeler la définition mathématique des ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.*

$$f(A) = \{f(x); x \in A\} \text{ et } f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$$

2. *Dessiner (graphe, patate) une fonction $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow [\![1, 5]\!]$ qui vérifie à la fois $f(\{a, b\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{b, c\}$.*

   Par exemple, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 2$ et $f(d) = 4$

3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - 1| \end{array} \right.$

   (a) *Dessiner le graphe de g.*

   A faire tout seul.

(b) *Donner* $g(\{-1,2\})$, $g([-1,3])$, $g^{-1}(\{1\})$ et $g^{-1}([0,1])$.

$g(\{-1,2\}) = \{2,1\}$, $g([-1,3]) = [0,2]$, $g^{-1}(\{1\}) = \{0,2\}$ et $g^{-1}([0,1]) = [0,2]$.

(c) *g est-elle injective ? Justifier. Si non, proposer deux intervalles I_1 et J_1 pour lesquels $g : I_1 \longrightarrow J_1$ soit injective.*

$g(0) = g(2) = 1$ et $1 \neq 2$ donc g n'est pas injective. Pour la rendre injective, on peut prendre $I_1 = [1, +\infty[$ et $J_1 = \mathbb{R}$.

(d) *g est-elle surjective ? Justifier. Si non, proposer deux intervalles I_2 et J_2 pour lesquels $g : I_2 \longrightarrow J_2$ soit surjective.*

-2 n'a pas d'antécédent donc g n'est pas surjective. Pour la rendre surjective, on peut prendre $I_2 = \mathbb{R}$ et $J_2 = \mathbb{R}^+$.

Exercice 4 : relations

Dans $E = \mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall (a,b) \in E^2, a\,\mathcal{R}\,b \iff \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $b = a^n$.

1. *Dire si $\mathcal{R}$ est réflexive. Justifier.*

   Soit $a \in E$. On a $a = a^1$, d'où $a\mathcal{R}a$. $\mathcal{R}$ est réflexive.

2. *Dire si $\mathcal{R}$ est symétrique. Justifier.*

   $8 = 2^3$ d'où $2\mathcal{R}8$. En revanche, on ne peut pas écrire 2 comme une puissance de 8. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.

3. *Dire si $\mathcal{R}$ est transitive. Justifier.*

   Soit $(a,b,c) \in E^3$ tel que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Il existe ainsi $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b = a^n$ et $c = b^p$. Ainsi, $c = a^{np}$ ce qui donne $a\mathcal{R}c$. La relation est transitive.

4. *Soit $(a,b) \in E^2$ tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$.*

   (a) *Montrer qu'il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b = b^{np}$.*

   Comme $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b = a^n$ et $a = b^p$. Ainsi, $b = b^{np}$.

   (b) *En déduire que $b = 1$ ou que $n = p = 1$. Qu'avez-vous finalement démontré ?*

   $b = b^{np} \implies b = 1$ ou $np = 1$. Dans le cas où $np = 1$, comme ce sont deux entiers naturels, on a forcément $n = p = 1$.

   Si $b = 1$ alors $a = 1$. Si $b \neq 1$, $b = a^n = a^1 = a$. Dans tous les cas, on obtient $a = b$. La relation est antisymétrique.