CORRECTION S1 B1 DP 2023

Exercice 1 : cardinal

1. *Soient F et G deux ensembles finis et disjoints. Donner Card$(F \cup G)$.*

$$\text{Card}(F \cup G) = \text{Card}(F) + \text{Card}(G)$$

2. *Soient E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E quelconques (non nécessairement disjoints).*
   (a) *En utilisant une partition de A, trouver une relation entre Card(A), Card$(A \setminus B)$ et Card$(A \cap B)$. Vous pouvez vous aider d'un dessin...* N.B. : $A \setminus B = \{x \in E;\ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.

   On a $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et cette union est disjointe. On peut donc appliquer la formule de la question 1 pour $F = A \setminus B$ et $G = A \cap B$. Ainsi,

$$\text{Card}(A) = \text{Card}\left((A \setminus B) \cup (A \cap B)\right) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B)$$

   (b) *Donner Card$(A \cup B)$.*

   $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

   (c) *En utilisant une partition de $A \cup B$ et la question 2.(a), démontrer le résultat précédent.*

   On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ et cette union est disjointe.
   Ainsi, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B)$ par la question 2.(a).

Exercice 2 : podiums

Une course cycliste oppose 20 concurrents. Le podium est composé du classement des trois premiers arrivés.
Pierre et Jade font partie des 20 concurrents.

Vous justifierez brièvement vos réponses. Vous simplifierez vos résultats sans faire les calculs jusqu'au bout....

1. *Combien y a-t-il de podiums possibles ?*

   Pour le 1^{er} de la course, il y a 20 possibilités, pour le 2^{nd}, il y a du coup 19 possibilités et pour le $3^{\text{ième}}$, 18 possibilités. Au total, il y a $20 \times 19 \times 18$ podiums possibles.

2. *Combien y a-t-il de podiums possibles dans lesquels Jade est première ?*

   Jade est première, il reste 19 possibilités pour le second et 18 pour le troisième. Au total, il y a 19×18 podiums possibles dans lesquels Jade est première.

3. *Combien y a-t-il de podiums possibles sans Pierre ni Jade ?*

   On enlève Jade et Pierre comme possibilités, ce qui laisse 18 concurrents potentiellement classés. Au total, il y a $18 \times 17 \times 16$ podiums possibles sans Pierre ni Jade.

4. *Combien y a-t-il de podiums possibles dans lesquels Pierre en fait partie mais pas Jade ?*

   Il n'y a pas Jade (on part sur 19 concurrents dont Pierre) mais Pierre peut être premier (dans ce cas 18 choix pour le second et 17 pour le troisième). Même chose si Pierre est second ou troisième. Au total, il y a donc $3 \times 18 \times 17$ podiums possibles dans lesquels Pierre en fait partie mais pas Jade.

5. *Combien y a-t-il de podiums possibles dans lesquels il y a au moins Jade ou Pierre ?*

   On passe par le complémentaire. Il y a $18 \times 17 \times 16$ podiums possibles sans Jade ni Pierre. Donc au total, il y a $20 \times 19 \times 18 - 18 \times 17 \times 16$ podiums possibles dans lesquels il y a au moins Jade ou Pierre.

6. *L'organisateur souhaite récompenser, sans distinction, les trois premiers en leur offrant un vélo chacun. Combien y a-t-il de récompenses possibles ?*

   Cela revient à choisir 3 personnes parmi les 20 concurrents car l'ordre n'a plus d'importance. Au total, il y a donc $\binom{20}{3} = \dfrac{20!}{3! \times 17!} = 3 \times 19 \times 20$ récompenses possibles.

Exercice 3 : dénombrement

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
Une urne contient p *boules vertes et* n *boules rouges indiscernables au toucher.*

Soit $k \in [\![0, n+p]\!]$ *avec* $k \leq n$ *et* $k \leq p$. *On effectue un tirage simultané de* k *boules de l'urne.*

1. *Combien y a-t-il de tirages possibles ?*

   Il y a $\binom{n+p}{k}$ tirages possibles.

2. *Soit* $i \in [\![0, k]\!]$. *Combien y a-t-il de tirages (simultanés) ayant i boules vertes et* $k-i$ *boules rouges ?*

   Il y a $\binom{p}{i}$ façons de prendre les i boules vertes et $\binom{n}{k-i}$ façons de prendre les $k-i$ boules rouges. Au total, il y a $\binom{p}{i} \times \binom{n}{k-i}$ tirages possibles.

3. *En déduire la formule* $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{p}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{n+p}{k}$. *Justifier proprement.*

   Pour prendre k boules, on peut prendre : 0 boule verte et k boules rouges, ou 1 boule verte et $k-1$ boules rouges, ou 2 boules vertes et $k-2$ boules rouges etc... jusqu'à k boules vertes et 0 boule rouge. Cela donne $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{p}{i}\binom{n}{k-i}$ tirages possibles. Comme par la question 1., on a vu qu'il y avait $\binom{n+p}{k}$ tirages possibles, on en déduit que :

   $$\sum_{i=0}^{k} \binom{p}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{n+p}{k}$$

4. *Application : calculer* $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}\binom{7}{4-i}$. *Vous donnerez le résultat sous la forme d'un entier.*

   $k = 4$, $p = 4$ et $n = 7$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}\binom{7}{4-i} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!7!} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11}{2 \times 3 \times 4} = 3 \times 10 \times 11 = 330$

Exercice 4 : probabilités conditionnelles

Des cours de soutien en mathématiques sont proposés aux étudiants de S1 d'Epita. Pour la promotion actuelle, la probabilité qu'un élève vienne en soutien est de 10%. *Si un élève vient en soutien, la probabilité qu'il valide l'UE de maths du S1 est de* 80%, *sinon, cette probabilité tombe à* 30%.
On notera V *l'événement « l'élève valide son UE de maths du S1 » et* S *l'événement « l'élève vient en soutien ».*

Vous donnerez les résultats sous forme de fraction simplifiée. Ils doivent être justifier proprement.

1. *Traduire les informations données dans l'énoncé à l'aide de probabilités et des événements ci-dessus.*

   L'énoncé nous dit : $P(S) = 0,1$, $P(V \mid S) = 0,8$ et $P(V \mid \overline{S}) = 0,3$.

2. *On choisit un élève au hasard dans la promo. Quelle est la probabilité qu'il valide l'UE de maths du S1 ?*

   Comme $\{S, \overline{S}\}$ forme une partition de Ω, on a $V = (V \cap S) \cup (V \cap \overline{S})$ (union disjointe). D'où,

   $$P(V) = P(V \cap S) + P(V \cap \overline{S}) = P(V \mid S)P(S) + P(V \mid \overline{S})P(\overline{S}) = 0,8 \times 0,1 + 0,3 \times 0,9 = 0,35 = \frac{7}{20}$$

3. *On choisit un élève qui a validé. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en soutien ?*

   On cherche $P(S \mid V)$. On a

   $$P(S \mid V) = \frac{P(V \cap S)}{P(V)} = \frac{P(V \mid S)P(S)}{P(V)} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,35} = \frac{0,08}{0,35} = \frac{8}{35}$$

4. *On veut que la probabilité qu'un élève valide son UE de maths du S1 soit au moins de* 75%. *Que faudrait-il prendre comme probabilité* p *de venir en soutien ?*

   Dans ce cas, en suivant le raisonnement de la question 1., $P(V) = 0,8p + 0,3(1-p) = 0,5p + 0,3$. On veut p tel que $0,5p + 0,3 \geq 0,75$. Cela donne $p \geq 0,9$.

Exercice 5 : cours

Soient X et Y deux variables aléatoires finies et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Rappeler les formules donnant $E(X+Y)$ et $E(aX+b)$.*
   cf cours
2. *En utilisant la question précédente* ***mise en évidence*** *dans les calculs, montrer que $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.*
   cf cours

Exercice 6 : variables aléatoires

Un étudiant passe un examen sous forme de QCM. L'examen contient 20 questions numérotées de 1 à 20. Chaque question est notée sur 1 point. La note totale de l'épreuve est donc une note sur 20. C'est un QCM sans point négatif, ni point intermédiaire : à chaque question, la note obtenue ne peut être que 0 ou 1.

L'étudiant s'est mal préparé à l'examen et choisit de répondre au hasard. Ses réponses sont indépendantes et, pour chaque question, il répond juste avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$.

1. *Soit $k \in [\![1, 20]\!]$. On considère la variable aléatoire X_k égale à la note obtenue à la question k.*
   (a) À $k \in [\![1, 20]\!]$ fixé, donner la loi de X_k.

   On a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X_k = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X = 0) = \dfrac{2}{3}$.
   Les X_k suivent donc une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

   (b) *Calculer l'espérance et la variance de chaque X_k. Vous devez détailler tous vos calculs et ne surtout pas parachuter les résultats !*

   - $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = \dfrac{1}{3}$.
   - $E(X^2) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$

2. *On considère maintenant la variable aléatoire Y égale à la note finale obtenue par l'étudiant à l'épreuve.*
   (a) *Écrire Y en fonction des X_k.*

   $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}$ car Y correspond à la somme des points obtenus à chaque question. Les X_k sont indépendantes.

   (b) *En justifiant proprement votre raisonnement, donner $P(Y = i)$ pour tout $i \in [\![0, 20]\!]$.*

   Y étant la somme de 20 variables de Bernoulli indépendantes, Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{1}{3}$. On a donc :

   $$\forall\, i \in [\![0, 20]\!],\ P(Y = i) = \binom{20}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{20-i}$$

   (c) *Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=0}^{20} P(Y = i) = 1$.*
   Par la formule du binôme de Newton :

   $$\sum_{i=0}^{20} P(Y=i) = \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{20-i} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{20} = 1^{20} = 1$$

   (d) *En justifiant le calcul, donner l'espérance et la variance de Y.*

   $E(Y) = E(X_1) + \cdots + E(X_{20}) = 20 \times \dfrac{1}{3}$ car les X_i suivent la même loi de Bernoulli. De plus, comme $X_1, \cdots, X_{20}$ sont indépendantes, $V(Y) = V(X_1) + \cdots + V(X_{20}) = 20 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{40}{9}$.