Correction Midterm Novembre 2022

Exercice 1 : intégrales

1. *Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer* $I = \int_0^1 \frac{2x^3+1}{(x^4+2x+1)^3}\,dx$

   On a $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4x^3+2}{(x^4+2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$. On reconnait alors la forme $\frac{u'}{u^3} = u'u^{-3}$. Une primitive est de la forme $\frac{u^{-3+1}}{-3+1}$.

   Ainsi, $I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2(x^4+2x+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\times 4^2}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{64}+\frac{1}{4} = \frac{15}{64}$

2. *En intégrant par parties, calculer* $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin(2x)\,dx$

   On pose $u(x) = 2x+1$ et $v'(x) = \sin(2x)$ de sorte que $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$. On a alors

   $$J = \left[-\frac{2x+1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

3. *Calculer* $K = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$ *en posant* $t = \sqrt{x+2}$.

   On a $t = \sqrt{x+2} \Longleftrightarrow x = t^2-2$. Ainsi, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. De plus, si $x=-1$, $t = \sqrt{-1+2} = 1$ et si $x = 1$, $t = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$. Ainsi,

   $$K = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2-2+3)t}\times 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [2\arctan(t)]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 2 : ensembles et fonctions

1. *Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Rappeler la définition mathématique des ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.*

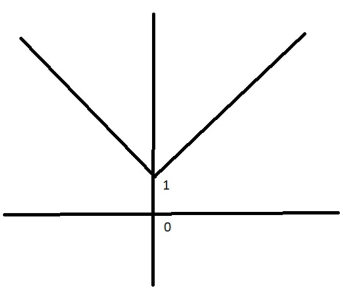
   $$f(A) = \{f(x),\, x\in A\} = \{y \in F,\, \exists\, x\in A,\, y = f(x)\} \text{ et } f^{-1}(B) = \{x\in E,\, f(x)\in B\}$$

2. *Soit $f : [\![1,4]\!] \longrightarrow [\![10,14]\!]$ telle que $f(1) = 10,\quad f(2) = 11,\quad f(3) = 11$ et $f(4) = 13$*

   $$f([\![1,4]\!]) = \{10,11,13\},\ f(\{3\}) = \{11\},\ f^{-1}(\{10,11\}) = \{1,2,3\} \text{ et } f^{-1}(\{12\}) = \emptyset$$

3. Soit $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|+1 \end{array}\right.$

   (a) *Dessiner le graphe de g.*



(b) *g est-elle injective ? Justifier. Si non, proposer deux intervalles I_1 et J_1 pour lesquels $g : I_1 \longrightarrow J_1$ soit injective.*
Comme $g(1) = g(-1) = 2$ et $1 \neq -1$, g n'est pas injective. En choisissant $I_1 = \mathbb{R}^+$ et $J_1 = \mathbb{R}$, g est injective car elle est continue et strictement croissante.

(c) *g est-elle surjective ? Justifier. Si non, proposer deux intervalles I_2 et J_2 pour lesquels $g : I_2 \longrightarrow J_2$ soit surjective.*
L'équation $0 = g(x)$ n'a pas de solution donc 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$. g n'est donc pas surjective. En prenant $I_2 = \mathbb{R}$ et $J_2 = [1, +\infty[$, g est surjective ($\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1$).

4. *Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

(a) *À partir de f et g, quelle fonction composée h peut-on faire ? Donner les domaines de départ et d'arrivée de cette fonction h.*
$h = g \circ f : E \longrightarrow G$

(b) *On suppose f et g injectives. Montrer que h est aussi injective.*
Supposons f et g injectives.
On veut montrer que : $\forall\,(x, x') \in E^2$, $g \circ f(x) = g \circ f(x') \implies x = x'$.
Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. On a alors $g\left(f(x)\right) = g\left(f(x')\right)$. g étant injective, on en déduit que $f(x) = f(x')$. Ce qui implique $x = x'$ car f est injective.

(c) *(question bonus) On suppose f et g surjectives. Montrer que h est aussi surjective.*
Soit $y \in G$. Par surjectivité de g, $\exists\, z \in F$ tel que $y = g(z)$.
Comme $z \in F$ et f surjective de E vers F, z a un antécédent par f dans E : $\exists\, x \in E$ tel que $z = f(x)$.
Ainsi, $y = g(z) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x)$ ce qui signifie $g \circ f$ surjective.

Exercice 3 : logique et relations

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. Pour deux éléments x et y de E, on notera $x\,\mathcal{R}\,y$ si x et y sont en relation, sinon on notera $x \not\mathcal{R} y$.

1. *Rappeler la définition mathématique de « $\mathcal{R}$ est réflexive ». Donner aussi sa négation.*
« $\mathcal{R}$ est réflexive » signifie : $\forall\, x \in E$, $x\,\mathcal{R}\,x$.
La négation est : $\exists\, x \in E$, $x \not\mathcal{R} x$.
2. *Rappeler la définition mathématique de « $\mathcal{R}$ est antisymétrique ». Donner aussi sa négation.*
« $\mathcal{R}$ est antisymétrique » signifie : $\forall\,(x, y) \in E^2$, $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x \implies x = y$.
La négation est : $\exists\,(x, y) \in E^2$ tel que $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x$ et $x \neq y$.
3. *Rappeler la définition mathématique de « $\mathcal{R}$ est transitive ». Donner aussi sa contraposée.*
« $\mathcal{R}$ est transitive » signifie : $\forall\,(x, y, z) \in E^3$, $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z \implies x\,\mathcal{R}\,z$.
La contraposée est : $\forall\,(x, y, z) \in E^3$, $x \not\mathcal{R} z \implies x \not\mathcal{R} y$ ou $y \not\mathcal{R} z$.
4. *Proposer un exemple d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive, antisymétrique et transitive. Comment appelle -t-on une telle relation ?*
Dans $\mathbb{R}$, $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est une relation d'ordre.

Exercice 4 : dénombrement

Pierre et Marie sont dans une classe de 20 élèves. Dans cette classe, il y a 12 garçons et 8 filles.

1. *On décide d'élire un comité de 3 élèves qui représentera la classe au niveau de l'école.*

(a) *Combien y a-t-il de comités possibles ? Justifier brièvement.*
Cela revient à prendre 3 élèves parmi les 20 élèves. Il y a donc $\binom{20}{3}$ comités possibles.

(b) *Combien y a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ? Justifier brièvement.*
Il y a $\binom{12}{2}$ façons de choisir les deux garçons et $\binom{8}{1}$ de choisir la fille. Au total, il y a donc $\binom{12}{2} \times 8$ comités possibles.

(c) *Combien y a-t-il de comités contenant au moins 2 filles ? Justifier brièvement.*

« Au moins deux filles » signifie « exactement deux filles » ou « exactement trois filles ». Il y a donc $\binom{8}{2} \times \binom{12}{1} + \binom{8}{3}$ comités possibles.

(d) *On veut que Pierre et Marie soient dans le comité. Combien y a-t-il de comité dans ce cas là ? Justifier brièvement.*

Du coup, il ne reste plus qu'à choisir un(e) élève parmi les 18 restants. Il y a donc $\binom{18}{1} = 18$ comités possibles.

2. *Les élèves de la classe doivent partir en week-end d'intégration. Pour cela, ils doivent créer un groupe de quatre responsables : un chef, un sous-chef et deux assistants (ces deux-là peuvent assister aussi bien le chef que le sous-chef). Personne ne peut occuper simultanément deux postes dans ce groupe.*

(a) *Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles ? Justifier brièvement.*

Il y a 20 façons de choisir le chef et ainsi 19 façons de choisir le sous-chef. Ensuite, il reste à choisir deux élèves parmi les 18 restant. Ainsi, il y a $20 \times 19 \times \binom{18}{2}$ groupes possibles.

(b) *On veut que le chef soit une fille, le sous-chef un garçon et parmi les deux assistants, on veut une fille et un garçon. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles dans ce cas là ? Justifier brièvement.*

8 façons de choisir le chef, 12 façons de choisir le sous-chef. Pour les assistants, il reste 7 façons de choisir la fille et 11 de choisir le garçons. Au total, il y a donc $8 \times 12 \times 7 \times 11$ groupes possibles.

(c) *C'est décidé : Marie sera la chef du groupe. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles dans ce cas là ? Justifier brièvement.*

Marie étant chef, il y a 19 façons de choisir le sous-chef et $\binom{18}{2}$ de choisir les assistants. Au total, il y a donc $19 \times \binom{18}{2}$ groupes possibles.

(d) *« Si Marie est la chef alors je veux aussi faire parti du groupe des responsables ! » dit Pierre. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles dans ce cas là ? Justifier brièvement.*

Soit Pierre est sous-chef soit il ne l'est pas. Si Pierre est sous-chef, il y a $\binom{18}{2}$ façons de choisir les deux assistants. Si Pierre n'est pas sous-chef, il y a 18 façons de choisir le sous-chef (ni Marie, ni Pierre) et il reste un seul assistant à choisir (ni Marie, ni Pierre, ni le sous-chef) : 1 parmi 17. Au total, il y a $\binom{18}{2} + 18 \times 17$ groupes possibles.

Exercice 5 : variables aléatoires

Dans une urne, on a 3 boules blanches et 2 boules vertes indiscernables au toucher.

1. *Proposer une expérience simple avec cette urne qui amène à la création d'une variable X de Bernoulli. Donner $E(X)$ et $V(X)$.*

On tire une boule de l'urne. On considère la variable aléatoire X qui est égale à 1 si la boule tirée est verte et 0 sinon. On a

$$P(X = 1) = \frac{2}{5} \text{ et } P(X = 0) = \frac{3}{5}$$

X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{5}$. Ainsi, $E(X) = p = \frac{2}{5}$ et $V(X) = p(1-p) = \frac{6}{25}$.

2. *Proposer une expérience simple avec cette urne qui amène à la création d'une variable Y binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{5}$. Donner $E(Y)$ et $V(Y)$.*

On tire successivement 5 boules avec remise de l'urne. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues.

On a $Y(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,5]\!]$, $P(Y = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{5-k}$

Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{5}$. On sait alors que $E(X) = np = 2$ et $V(X) = np(1-p) = \frac{6}{5}$.

3. *On extrait une à une les boules de l'urne (c'est-à-dire qu'on effectue un tirage successif et sans remise !). Soit Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche tirée.*

(a) *Quelles sont les valeurs prises par Z. Justifier brièvement.*

On peut avoir la première boule blanche au premier tirage et au maximum au troisième car il n'y a que deux boules vertes. Ainsi, $Z(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

(b) *Donner la loi de Z.*

$P(Z = 1) = \dfrac{3}{5}$. On tire une boule blanche au premier tirage et il y a 3 boules blanches sur les 5 boules possibles.

$P(Z = 2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$. Au premier tirage, on a une boule verte (2 possibilités sur 5) et au deuxième, on a une blanche (3 blanches mais il n'y a plus que 4 boules dans l'urne).

$P(Z = 3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{10}$. Cela revient à tirer les deux boules vertes.

(c) *Calculer l'espérance de Z.*

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{3} kP(Z = k) = 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

(d) *Calculer la variance de Z*

On a $E(Z^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 P(Z = k) = \frac{6}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 9 \times \frac{1}{10} = \frac{27}{10}$. Ainsi, $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \dfrac{27}{10} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{20}$

Exercice 6 : probabilités conditionnelles

On dispose de deux boîtes de bonbons A et B indiscernables. Dans A, il y a 10 sucettes au citron et 30 sucettes au coca. Dans B, il y a 25 sucettes au citron et 15 sucettes au coca.
On choisit au hasard une boîte puis une sucette dans cette boîte.

1. *Quelle est la probabilité pour que la sucette extraite soit au citron ? Vous détaillerez avec soin vos étapes avant de passer à l'application numérique.*

   Notons A : « La sucette provient de la boîte A », B : « La sucette provient de la boîte B » et C : « La sucette est au citron ». $\{A, B\}$ forment une partition de l'univers. On cherche $P(C)$.
   Comme $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ et cette union est disjointe, on a

   $$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(C \,|\, A)P(A) + P(C \,|\, B)P(B) = \frac{10}{40} \times \frac{1}{2} + \frac{25}{40} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$$

2. *Sachant que l'on a extrait une sucette au citron, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte A ?*

   On cherche $P(A \,|\, C)$. On a

   $$P(A \,|\, C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C \,|\, A)P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{16}} = \frac{2}{7}$$

Exercice 7 : une démonstration

Voir Cours !

Exercice 8 : exercice original

1. *Rappeler la formule du binôme de Newton.*

   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. *Grâce à cette formule, expliquer pourquoi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = 4^n$.*

   On applique la formule du binôme pour $a = 1$ et $b = 3$. Ainsi,

   $$4^n = (1 + 3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$$

3. *Le but est de redémontrer le formule ci-dessus par le dénombrement.*

   Considérons n cases. On veut colorier chaque case. Pour cela, on ne dispose que de 4 feutres de couleurs : un feutre bleu, un feutre vert, un feutre rouge et un feutre jaune.

   (a) *Proposer une façon de colorier ces n cases qui amène à : « il y a 4^n façons de colorier les cases ». Vous prendrez soin d'expliquer votre raisonnement proprement.*

   On colorie les n cases une par une. Pour la première case, il y a 4 couleurs possibles, pour la seconde aussi,....,pour la n-ième aussi. Au total, il y a donc $\underbrace{4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{n fois} = 4^n$ façons de colorier les cases.

   (b) *Proposer une autre façon de colorier ces n cases qui amène à : « il y a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$ façons de colorier les cases »*

   Vous prendrez soin d'expliquer votre raisonnement proprement.

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On prend le feutre vert et on choisit de colorier k cases en vert. Il y a $\displaystyle\binom{n}{k}$ façons de choisir les k cases. Une fois choisies, pour chacune de ces k cases, il n' y a qu'une façon de les colorier en vert. Une fois colorié les k cases, il nous reste $n-k$ à colorier en bleu, rouge ou jaune. Pour chacune d'entre elles, on a donc 3 possibilités.

   Au total, il y a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$ façons de colorier les n cases.

   (c) *En déduire le formule voulue.*

   On récupère ainsi la formule du 2..