EPITA

Mathématiques

Contrôle S1

durée : 3 heures

Novembre 2021

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. Il y a en tout 8 exercices.
— Documents et calculatrices interdits.
— Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (3 points)

Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathcal{R} y \iff x^2 \leq y^2$$

Citer les différentes propriétés (avec les quantificateurs) qui définissent une relation d'ordre. Pour chacune d'entre elles, dire si la relation $\mathcal{R}$ ci-dessus la vérifie en justifiant votre réponse.

Exercice 2 (3 points)

Traduire les propriétés suivantes en syntaxe mathématique (avec les quantificateurs).

1. Tout réel positif est le carré d'un réel.

2. Si le produit de deux réels est nul alors l'un au moins de ces réels est nul.

3. Tout entier naturel est pair ou impair. (Il est interdit dans cette question d'utiliser la notion de congruence).

Exercice 3 (4,5 points)

1. Calculer directement $I = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}\,\mathrm{d}x$

2. Calculer, en intégrant par parties, $J = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$

3. À l'aide du changement de variable $x = 2t+1$, calculer $K = \displaystyle\int_1^{2\sqrt{3}+1} \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4 (3,5 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair et } f(n) = n \text{ sinon}$$

1. f est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

2. f est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

3. On suppose, dans cette question que l'on restreint le domaine de départ de f à $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Donner $f(\{0, 1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\{1, 3\})$ et $f^{-1}(\{4\})$.

Exercice 5 (5 points)

Dans une urne, il y a n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n.
Pour un entier naturel $k \leq n$, on tire **simultanément** k boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ? Justifiez brièvement.

2. Quel est le nombre de tirages ayant la boule numérotée 1 ? Justifiez brièvement.

3. Quel est le nombre de tirages n'ayant pas la boule numérotée 1 ? Justifiez brièvement.

4. Expliquez en quoi les résultats précédents permettent de montrer la formule (P) suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

5. Redémontrer la formule (P) en utilisant l'expression des coefficients binomiaux avec les factoriels.

Exercice 6 (5 points)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1. Proposer une expérience simple avec le dé qui amène à la création d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Rappeler l'espérance et la variance de X en fonction de p.

2. Proposer une expérience simple avec le dé qui amène à la création d'une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$. Rappeler l'espérance et la variance de Y en fonction de n et p.

3. On lance le dé une seule fois. On gagne 5 points si le dé amène un multiple de 3, 3 points si le dé amène 1 ou 2 et zéro point dans les autres cas. Soit G la variable égale au nombre de points marqués. Donner la loi de G et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 7 (4 points)

Imaginons qu'un virus touche les habitants du monde entier. Des tests de dépistages du virus sont alors mis en vente. Le mode d'emploi précise que

- Si un individu n'est pas malade, le test est fiable dans 80% des cas.
- Si un individu est malade, le test est fiable dans 99% des cas.

On suppose que le virus touche 25% de la population française. On tire un habitant au hasard et on lui fait passer le test.

On note M :« L'habitant est malade » et T : « Le test est positif »

1. Donner une partition de l'événement T en fonction de M. Donner alors la formule littérale qui permet de calculer $P(T)$. Préciser alors les valeurs numériques de chacune des probabilités y apparaissant (sans finaliser les calculs).

2. Expliquer comment calculer la probabilité qu'un habitant soit malade sachant que le test est positif (la valeur finale n'est pas demandée).

Exercice 8 (2 points)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n$$

1. Que vaut S_n dans le cas où $q = 1$?

2. On suppose que $q \neq 1$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.