CORRECTION MIDTERM S1

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathcal{R} y \iff x^2 \leq y^2$$

Citer les différentes propriétés (avec les quantificateurs) qui définissent une relation d'ordre. Pour chacune d'entre elles, dire si la relation $\mathcal{R}$ ci-dessus la vérifie en justifiant votre réponse.

• On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x^2 \leq x^2$, on a $x \mathcal{R} x$. Notre relation est donc réflexive.

• On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \implies x = y$.

Prenons $x = -1$ et $y = 1$. Comme $x^2 = y^2 = 1$, on a $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$. Pourtant, $x \neq y$. Notre relation n'est donc pas antisymétrique.

• On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. On a alors $x^2 \leq y^2$ et $y^2 \leq z^2$. Ainsi, $x^2 \leq z^2$ d'où $x \mathcal{R} z$. Notre relation est donc transitive.

Notre relation n'est pas une relation d'ordre....

Exercice 2

Traduire les propriétés suivantes en syntaxe mathématique (avec les quantificateurs).

1. *Tout réel positif est le carré d'un réel.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$$

2. *Si le produit de deux réels est nul alors l'un au moins de ces réels est nul.*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

3. *Tout entier naturel est pair ou impair. (Il est interdit dans cette question d'utiliser la notion de congruence).*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p \text{ ou } n = 2p + 1$$

Exercice 3

1. *Calculer directement* $I = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3x + 1}\, dx$

   On a $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 (3x^2 + 3)\sqrt{x^3 + 3x + 1}\, \mathrm{d}x$. On reconnait alors la forme $u'u^\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, $I = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(x^3 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2}{3}(x^3 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}5^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{9}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

2. *Calculer, en intégrant par parties,* $J = \displaystyle\int_0^1 (2x + 1)e^{2x}\, dx$

   On pose $u = 2x + 1$ et $v' = e^{2x}$ de sorte que $u' = 2$ et $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$.
   Ainsi,

$$J = \left[\left(\frac{2x + 1}{2}\right) \times e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = e^2$$

3. *À l'aide du changement de variable $x = 2t+1$, calculer* $K = \displaystyle\int_1^{2\sqrt{3}+1} \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx$

$x = 2t+1 \iff t = \dfrac{x-1}{2}$. Ainsi, $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. De plus, si $x = 1$, on a $t = 0$ et si $x = 2\sqrt{3}+1$, on a $t = \sqrt{3}$. Ainsi,

$$K = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4t^2+4} \times 2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\arctan(t)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \frac{n}{2} \quad \textit{si} \;\; n \;\; \textit{est pair et} \quad f(n) = n \quad \textit{sinon}$$

1. *f est-elle injective ? Justifiez votre réponse.*

   On a $f(1) = 1 = f(2)$ et $1 \neq 2$. f n'est donc pas injective.

2. *f est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(2n) = \dfrac{2n}{2} = n$. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m = 2n \in \mathbb{N} \;\; n = f(m)$$

   f est donc surjective.

3. *On suppose, dans cette question que l'on restreint le domaine de départ de f à $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Donner $f(\{0,1,2,3\})$, $f^{-1}(\{1,3\})$ et $f^{-1}(\{4\})$.*

   On a

n	0	1	2	3	4	5	6
f(n)	0	1	1	3	2	5	3

D'où : $f(\{0,1,2,3\}) = \{0,1,3\}$, $f^{-1}(\{1,3\}) = \{1,2,3,6\}$ et $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

Exercice 5

Dans une urne, il y a n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n.
Pour un entier naturel $k \leq n$, on tire simultanément k boules de l'urne.

1. *Quel est le nombre de tirages possibles ? Justifiez brièvement.*

   Notons $E = \{$tirages possibles$\}$.

   Comme le tirage est simultané, cela revient à prendre k éléments parmi n éléments. D'où, $\mathrm{Card}(E) = \dbinom{n}{k}$.

2. *Quel est le nombre de tirages ayant la boule numérotée 1 ? Justifiez brièvement.*

   Notons $F = \{$tirages ayant la boule numérotée 1$\}$.

   Il n'y a qu'une seule façon de prendre la boule 1. Il reste ensuite à prendre $k-1$ boules parmi $n-1$.

   D'où, $\mathrm{Card}(F) = 1 \times \dbinom{n-1}{k-1} = \dbinom{n-1}{k-1}$.

3. *Quel est le nombre de tirages n'ayant pas la boule numérotée 1 ? Justifiez brièvement.*

   Notons $\overline{F} = \{$tirages n'ayant pas la boule numérotée 1$\}$.

   Cela revient à prendre k boules parmi $n-1$. D'où, $\mathrm{Card}(\overline{F}) = \dbinom{n-1}{k}$.

4. *Expliquez en quoi les résultats précédents permettent de montrer la formule (P) suivante :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

On a $E = F \cup \overline{F}$ et cette union est disjointe. D'où, $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) + \text{Card}(\overline{F})$.
Par conséquent, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

5. *Redémontrer la formule (P) en utilisant l'expression des coefficients binomiaux avec les factoriels.*

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k-1)! \times (n-k)} + \frac{(n-1)! \times k}{(k-1)!(n-k)! \times k} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Exercice 6

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1. *Proposer une expérience simple qui amène à la création d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Rappeler l'espérance et la variance de X en fonction de p.*

On lance une fois le dé. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si le résultat du dé est 1, égale à 0 sinon.
On a $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 0) = \frac{5}{6}$.
X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
On sait alors que $E(X) = p = \frac{1}{6}$ et que $V(X) = p(1-p) = \frac{5}{36}$.

2. *Proposer une expérience simple qui amène à la création d'une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$. Rappeler l'espérance et la variance de Y en fonction de n et de p.*

On répète l'expérience précédente 10 fois, en supposant les lancers indépendants. Soit Y la variable égale au nombre de fois que le dé a amené 1 au cours de ces 10 lancers. Y est la somme de 10 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{1}{6}$. Y prend donc ses valeurs dans $[\![0, 10]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$, on a

$$P(Y = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$.
On sait alors que $E(Y) = np = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ et que $V(Y) = np(1-p) = \frac{25}{18}$.

3. *On lance le dé une seule fois. On gagne 5 points si le dé amène un multiple de 3, 3 points si le dé amène 1 ou 2 et zéro point dans les autres cas. Soit G la variable égale au nombre de points marqués. Donner le loi de G et calculer son espérance et sa variance.*

La variable G prend les valeurs 5, 3 et 0.

Entre 1 et 6, il y a 2 multiples de 3 (le 3 et le 6). D'où, $P(G=5)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.
De plus, $P(G=3)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.
$G=0$ quand le dé a amené 4 ou 5. D'où, $P(G=0)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.
On sait alors que

- $E(G)=0\times P(G=0)+3\times P(G=3)+5\times P(G=5)$. Ainsi, $E(G)=\dfrac{8}{3}$.
- $E(G^2)=0^2\times P(G=0)+3^2\times P(G=3)+5^2\times P(G=5)=\dfrac{34}{3}$. Ainsi, $V(G)=E(G^2)-(E(G))^2=\dfrac{38}{9}$.

Exercice 7

Imaginons qu'un virus touche les habitants du monde entier. Des tests de dépistages du virus sont alors mis en vente. Le mode d'emploi précise que

- *Si un individu n'est pas malade, le test est fiable dans 80% des cas.*
- *Si un individu est malade, le test est fiable dans 99% des cas.*

On suppose que le virus touche 25% de la population française. On tire un habitant au hasard et on lui fait passer le test.

On note M :« L'habitant est malade » et T : « Le test est positif »

1. *Donner une partition de l'événement T en fonction de M. Donner alors la formule littérale qui permet de calculer $P(T)$. Préciser alors las valeurs numériques de chacune des probabilités y apparaissant (sans finaliser les calculs).*

   $\{M,\overline{M}\}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, $T=(T\cap M)\cup(T\cap\overline{M})$ et cette union est disjointe. D'où

   $$P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap\overline{M})=P(T\,|\,M)P(M)+P(T\,|\,\overline{M})P(\overline{M})$$

   Par conséquent, $P(T)=0,99\times 0,25+0,2\times 0,75\simeq 0,40$

2. *Expliquer comment calculer la probabilité qu'un habitant soit malade sachant que le test est positif (la valeur finale n'est pas demandée).*

   On cherche $P(M\,|\,T)$. On a

   $$P(M\,|\,T)=\frac{P(T\cap M)}{P(T)}=\frac{P(T\,|\,M)P(M)}{P(T)}=\frac{0,99\times 0,25}{0,3975}\simeq 0,62$$

Exercice 8

Soit $q\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère la somme

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}q^k=q^0+q^1+q^2+\ldots+q^n$$

1. *Que vaut S_n dans le cas où $q=1$?*

   $S_n=1+1+\ldots+1$ et il y a $n+1$ termes. Donc, $S_n=n+1$.

2. *On suppose que $q\neq 1$. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

   - $n=0$: On a $S_0=q^0=1$ et $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}=1$. La propriété est vraie au rang 0.
   - Supposons la propriété vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$.

   On a

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.