EPITA

Mathématiques

Contrôle 1

Novembre 2020

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3 points)

On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des élèves d'une classe.
On définit sur $\mathcal{C}$ la relation suivante : $\forall(e,e') \in \mathcal{C}^2, \quad e\mathcal{R}e' \Longleftrightarrow$ "e habite à moins de 5mn de chez e'"
On notera $e\not\mathcal{R}e'$ si : "e habite à strictement plus de 5mn de chez e'".

Exprimer avec des quantificateurs les phrases suivantes.

Exemple : "Un des élèves de la classe est à moins de 5mn de tous les autres élèves." s'écrit : $\exists e \in \mathcal{C},\ \forall e' \in \mathcal{C}, \quad e\mathcal{R}e'$

a. Tout élève a au moins un camarade à moins de 5mn de chez lui.

b. Un des élèves n'a aucun camarade à moins de 5mn de chez lui.

c. Si un élève e habite à moins de 5mn d'un élève e' et que e' habite à moins de 5mn de e'', alors e habite à moins de 5mn de e''.

Exercice 2 (4 points)

On s'intéresse de nouveau à la relation $\mathcal{R}$ décrite dans l'exercice 1.
Citer les différentes propriétés qui définissent une relation d'ordre.
Pour chacune d'elles, dire si la relation $\mathcal{R}$ la vérifie et justifier sa réponse.

Exercice 3 (5 points)

1. Sans vous préoccuper du domaine de définition, calculer la dérivée de la fonction : $f(x) = \sin(e^{3x} + 2)$

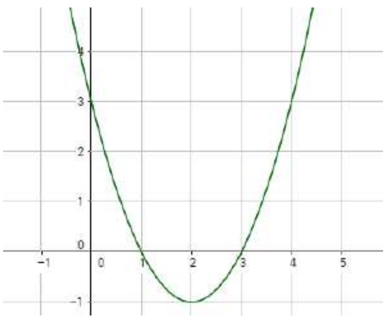
2. Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (3 points)

Soient $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (x-2)^2 - 1 \end{array} \right.$

dont voici le graphe ci-contre.



a. f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

b. Proposer un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel qu'en remplaçant un seul des ensembles E ou F par I, f soit injective. Justifiez votre réponse.

c. Proposer un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel qu'en remplaçant un seul des ensembles E ou F par J, f soit surjective. Justifiez votre réponse.

Exercice 5 (4 points)

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad p \leqslant n$.

1. Quelle relation relie $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{n-p}$?

2. Démontrer cette relation par le calcul.

3. Soit E un ensemble à n éléments. À quoi correspond le nombre $\binom{n}{p}$? $\binom{n}{n-p}$? Comment justifier la relation du 1. ?

Exercice 6 (4 points)

Montrer par récurrence la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \dfrac{2^n}{n!} \leqslant \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Exercice 7 (7 points)

1. **Dans cet exercice, l'application numérique exacte n'est pas demandée.**
   Seule la formule appliquée aux données de l'exercice est attendue.
2. **Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.**

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. On appelle $\mathcal{M}_5(E)$ l'ensemble des mots de cinq lettres construits à partir des lettres de E avec répétition, comme par exemple : "$kabke$".

   a. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_5(E)$?

   b. Combien y a-t-il de mots contenant <u>au moins</u> une fois la lettre "l" dans $\mathcal{M}_5(E)$?

   c. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "$babab$" ?

2. On appelle $\mathcal{N}_5(E)$ l'ensemble des mots de 5 lettres sans répétition construits à partir des lettres de E. Exemple : "$kgehj$"

   a. Quel est le cardinal de $\mathcal{N}_5(E)$?

   b. Combien y a-t-il de mots se terminant par une voyelle dans $\mathcal{N}_5(E)$?

   c. Combien y a-t-il de mots ne contenant aucune des lettres $\{a, d, e, f, h\}$ dans $\mathcal{N}_5(E)$?

   d. Combien y a-t-il de mots contenant au moins une des lettres $\{a, d, e, f, h\}$ dans $\mathcal{N}_5(E)$?