EPITA

Mathématiques

Contrôle 1

Novembre 2020

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3 points)

On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des élèves d'une classe.
On définit sur $\mathcal{C}$ la relation suivante : $\forall (e, e') \in \mathcal{C}^2, \quad e\mathcal{R}e' \iff$ "e habite à moins de 5mn de chez e'"
On notera $e\not\mathcal{R}e'$ si : "e habite à strictement plus de 5mn de chez e'".

Exprimer avec des quantificateurs les phrases suivantes.

Exemple : "Un des élèves de la classe est à moins de 5mn de tous les autres élèves." s'écrit : $\exists e \in \mathcal{C}, \forall e' \in \mathcal{C}, \quad e\mathcal{R}e'$

a. Tout élève a au moins un camarade à moins de 5mn de chez lui.

$\forall e \in \mathcal{C} \quad \exists e' \in \mathcal{C} \quad e\mathcal{R}e'$

b. Un des élèves n'a aucun camarade à moins de 5mn de chez lui.

$\exists e \in \mathcal{C} \quad \forall e' \in \mathcal{C} \quad e\not\mathcal{R}e'$

c. Si un élève e habite à moins de 5mn d'un élève e' et que e' habite à moins de 5mn de e'', alors e habite à moins de 5mn de e''.

$\forall e, e', e'' \in \mathcal{C}^3 \quad e\mathcal{R}e'$ et $e'\mathcal{R}e'' \Longrightarrow e\mathcal{R}e''$

Exercice 2 (4 points)

On s'intéresse de nouveau à la relation $\mathcal{R}$ décrite dans l'exercice 1.
Citer les différentes propriétés qui définissent une relation d'ordre.
Pour chacune d'elles, dire si la relation $\mathcal{R}$ la vérifie et justifier sa réponse.

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Réflexive $\forall e \in \mathcal{C} \quad e\mathcal{R}e$ Vraie
En effet tout élève e habite à moins de 5 mn de lui même

Transitive $\forall e, e', e'' \in \mathcal{C}^3 \quad e\mathcal{R}e'$ et $e'\mathcal{R}e'' \Longrightarrow e\mathcal{R}e''$
Faux car si e'' habite à 5mn de e' dans la direction opposée à e $e\not\mathcal{R}e''$

Antisymétrique $\forall e, e' \in \mathcal{C}^2 \quad e\mathcal{R}e'$ et $e'\mathcal{R}e \Longrightarrow e = e'$
Faux Si e et e' sont deux élèves distincts habitant à 5mn l'un de l'autre

Conc : $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre

Exercice 3 (5 points)

1. Sans vous préoccuper du domaine de définition, calculer la dérivée de la fonction : $f(x) = \sin(e^{3x} + 2)$

$$f'(x) = \sin'(e^{3x}+2) \times (e^{3x}+2)' = \cos(e^{3x}+2) \times 3e^{3x}$$

2. Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx$ en posant $t = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$$t = \frac{x}{\sqrt{3}} \iff x = \sqrt{3}\,t$$

- $dx = \sqrt{3}\,dt$
- Bornes $0 \longrightarrow \dfrac{0}{\sqrt{3}} = 0$

  $1 \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- $x^2 = (\sqrt{3}\,t)^2 = 3t^2$

$$J = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{3t^2+3}\sqrt{3}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right)$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $v = \ln(x)$

$u = 2\sqrt{x}$ $v' = \dfrac{1}{x}$

$$K = \Big[2\sqrt{x}\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x} \times \frac{1}{x}\,dx$$

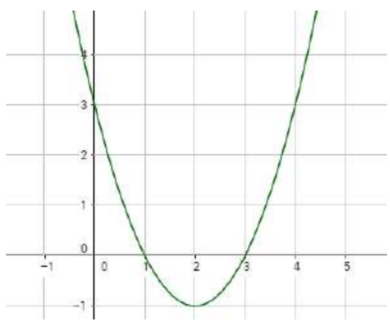
$$K = 2\sqrt{e}\ln(e) - 2\ln(1) - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$K = 2\sqrt{e} - 2\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$$

Exercice 4 (3 points)

Soient $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (x-2)^2 - 1 \end{cases}$

dont voici le graphe ci-contre.



a. f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

f n'est pas injective car $1 \neq 3$ et $f(1) = f(3)$

f n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq -2$

b. Proposer un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel qu'en remplaçant un seul des ensembles E ou F par I, f soit injective. Justifiez votre réponse.

Si on remplace E par $I = [2, +\infty[$
f est strictement croissante sur I donc injective
$\forall x, y \in I^2 \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

c. Proposer un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel qu'en remplaçant un seul des ensembles E ou F par J, f soit surjective. Justifiez votre réponse.

Si on remplace F par $J = [-1, +\infty[$
alors $f(\mathbb{R}) = J$ car $\min_{\mathbb{R}} f = -1$, $\lim_{\infty} f = +\infty$
(et f continue sur $\mathbb{R}$)
donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans J.

Exercice 5 (4 points)

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad p \leqslant n$.

1. Quelle relation relie $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{n-p}$?

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2. Démontrer cette relation par le calcul.

$\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}$

3. Soit E un ensemble à n éléments. À quoi correspond le nombre $\binom{n}{p}$? $\binom{n}{n-p}$? Comment justifier la relation du 1. ?

$\binom{n}{p}$ est le nombre de sous-ensembles à p éléments de E
$\binom{n}{n-p}$ est le nombre de sous-ensembles à $(n-p)$ éléments de E
Quand on choisit un sous ensemble A à p éléments.
alors $\overline{A}$ a $(n-p)$ éléments ce qui explique qu'il y ait le même nombre de sous ensemble à p éléments qu'à $(n-p)$ éléments.

Exercice 6 (4 points)

Montrer par récurrence la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

On pose $P(n)$ " $\frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ "

Initialisation

$n=2$ $\quad \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{2} \times \frac{4}{9} = 2$

donc $P(2)$ est vraie

Hérédité On suppose que pour un $n \geqslant 2$ $P(n)$ vraie

montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

AD $P(n+1)$ $\quad \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{n!} \times \frac{2}{(n+1)} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{n+1}$$ car $P(n)$ est vraie

Or $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3$ donc $\frac{2}{n+1} \leqslant \frac{2}{3}$

Ainsi $$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{n+1} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

On a donc $\forall n \geqslant 2 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion $P(2)$ vraie et $\forall n \geqslant 2 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Par récurrence $\forall n \geqslant 2 \quad P(n)$ vraie

Exercice 7 (7 points)

1. **Dans cet exercice, l'application numérique exacte n'est pas demandée. Seule la formule appliquée aux données de l'exercice est attendue.**
2. **Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.**

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. On appelle $\mathcal{M}_5(E)$ l'ensemble des mots de cinq lettres construits à partir des lettres de E avec répétition, comme par exemple : "*kabke*".

   a. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_5(E)$?

   $|E| = 12$ Construire un mot avec répétition est comme un tirage ordonné avec remise $|\mathcal{M}_5(E)| = 12^5$

   b. Combien y a-t-il de mots contenant au moins une fois la lettre "l" dans $\mathcal{M}_5(E)$?

   Le nombre de mots sans l est 11^5
   Donc il y a $12^5 - 11^5$ mots avec au moins une fois l

   c. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "*babab*" ?

   babab a 5 lettres dont 3 fois b et 2 fois a
   donc le nombre d'anagrammes est $\frac{5!}{3!2!} = 10$

2. On appelle $\mathcal{N}_5(E)$ l'ensemble des mots de 5 lettres sans répétition construits à partir des lettres de E. Exemple : "*kgehj*"

   a. Quel est le cardinal de $\mathcal{N}_5(E)$?

   Construire un mot sans répétition est un tirage ordonné de 5 lettres sans remise $|\mathcal{N}_5(E)| = A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$

   b. Combien y a-t-il de mots se terminant par une voyelle dans $\mathcal{N}_5(E)$?

   On tire d'abord une voyelle parmi 3 puis les 4 autres lettres parmi 11.
   On a donc $3 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ mots se terminant par une voyelle.

   c. Combien y a-t-il de mots ne contenant aucune des lettres $\{a, d, e, f, h\}$ dans $\mathcal{N}_5(E)$?

   Il reste 7 lettres
   Donc Il y a $A_7^5 = \frac{7!}{2!}$ mots sans $\{a, d, e, f, h\}$

   d. Combien y a-t-il de mots contenant au moins une des lettres $\{a, d, e, f, h\}$ dans $\mathcal{N}_5(E)$?

   Ce sont tous les mots sauf ceux ne contenant pas ces lettres.
   Donc il y en a $A_{12}^5 - A_7^5$