Corrigé du contrôle

Exercice 1 (2 points)

1. Fausse : prendre par exemple $x = y = 1$.
2. Fausse : prendre par exemple $x = 1$.
3. Vraie : il suffit de prendre $x = -y^2$.
4. Vraie : prendre $x = y = 0$.

Exercice 2 (3,5 points)

1. $f'(x) = \dfrac{1}{\big(1+\arctan^2(x)\big)\big(1+x^2\big)}\cdot$

2. Via une IPP en posant $u(x) = x^2 + x$ et $v'(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on a

$$J = 2\left[\left(x^2+x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi (2x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\left(\pi^2+\pi-\int_0^\pi (2x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x\right)$$

Via une nouvelle IPP en posant $u(x) = 2x+1$ et $v'(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on a

$$\int_0^\pi (2x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = -2\left[(2x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi + 4\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 2 + 8\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi = 10$$

Finalement $J = 2\big(\pi^2+\pi-10\big)$.

3. En posant $u = e^x$, on a $x = \ln(u)$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}\cdot$ Donc

$$K = \int_1^e \frac{1}{1+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u+1} = \big[\ln(u+1)\big]_1^e = \ln(e+1) - \ln(2)$$

Exercice 3 (2 points)

1. f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par f.

   f injective car si $(x,y) \in E^2$ vérifie $f(x) = f(y)$ alors $2x+4 = 2y+4$ donc $x = y$.

2. g n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent par g.

   g injective car si $(x,y) \in F^2$ vérifie $g(x) = g(y)$ alors $\dfrac{x}{2}+2 = \dfrac{y}{2}+2$ donc $x = y$.

Exercice 4 (1,5 points)

R est réflexive. En effet, soit $(a,b) \in E$. Alors $(a,b)R(a,b)$ vu que $ab = ba$.

R est symétrique. En effet soient $(a,b) \in E$ et $(a',b') \in E$ tels que $(a,b)R(a',b')$. Alors $ab' = ba'$ donc $a'b = b'a$ d'où $(a',b')R(a,b)$.

R est transitive. En effet, soient $(a,b) \in E$, $(a',b') \in E$ et $(a'',b'') \in E$ tels que $(a,b)R(a',b')$ et $(a',b')R(a'',b'')$.

Alors $ab' = ba'$ et $a'b'' = b'a''$ donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ et $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''}\cdot$

Ainsi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a''}{b''}$ donc $(a,b)R(a'',b'')$.

Exercice 5 (3 points)

1. n^p.
2. $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$.
3. Les anagrammes du mot « table » correspondent à toutes les permutations de $E = \{t, a, b, l, e\}$. On a donc $5! = 120$ anagrammes du mot « table ».

   Même principe pour le mot « tableau » sauf que la lettre « a » est répétée deux fois donc le nombre d'anagrammes du mot « tableau » est $\dfrac{5!}{2!} = 60$.
4. Il y a n façons de choisir le président parmi les n membres de l'association puis ensuite autant de façons de choisir les (éventuels) autres conseillers que de parties dans l'ensemble à $n-1$ éléments de tous les autres membres de l'association soit au total $n2^{n-1}$ bureaux possibles.

Exercice 6 (3 points)

1. Obtenir 3 balles d'une seule couleur signifie obtenir 3 rouges (parmi les 5) OU 3 vertes (parmi les 3).

   Ainsi la probabilité cherchée est $\dfrac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \dfrac{11}{120}$.
2. Obtenir les trois couleurs parmi ces 3 balles signifie obtenir 1 rouge (parmi les 5) ET 1 verte (parmi les 3) ET 1 blanche (parmi les 2).

   Ainsi la probabilité cherchée est $\dfrac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4}$.
3. L'événement « au moins deux couleurs » est l'événement contraire de l'événement « une seule couleur ».

   Ainsi la probabilité cherchée est $1 - \dfrac{11}{120}$.

Exercice 7 (2 points)

Notons A l'événement « X pair » et B l'événement « $X \leqslant 4$ ».

$P(A) = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,7$.

$P_B(A) = \dfrac{0,1+0,2}{0,7} = \dfrac{3}{7} \neq P(A)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

A et B ne sont pas incompatibles car par exemple $(X = 2) \in A \cap B$.

Exercice 8 (3 points)

Notons M l'événement « personnes atteintes de la grippe > et V l'événement « personnes vaccinées ».

Via l'énoncé, on a donc $P(V) = 0,6$; $P(M) = 0,1$ et $P_M(V) = 0,06$.

1. a. $P_V(M) = \dfrac{P_M(V)P(M)}{P(V)} = \dfrac{0,06 \times 0,1}{0,6} = 0,01 = 1\%$.

   b. $P_{\overline{V}}(M) = \dfrac{P_M\left(\overline{V}\right)P(M)}{P(V)} = \dfrac{0,94 \times 0,1}{0,6} \simeq 0,156 \simeq 15,6\%$.
2. On souhaite que $P(M) = \dfrac{500}{10000} = 0,05 = 5\%$.

   Notons $p = P(V)$.

   On a $P(M) = P_V(M)P(V) + P_{\overline{V}}(M)P\left(\overline{V}\right)$ soit

   $$0,05 = 0,01p + c(1-p)$$

   Ainsi $p = \dfrac{c - 0.05}{c - 0,01}$.