

Contrôle 1

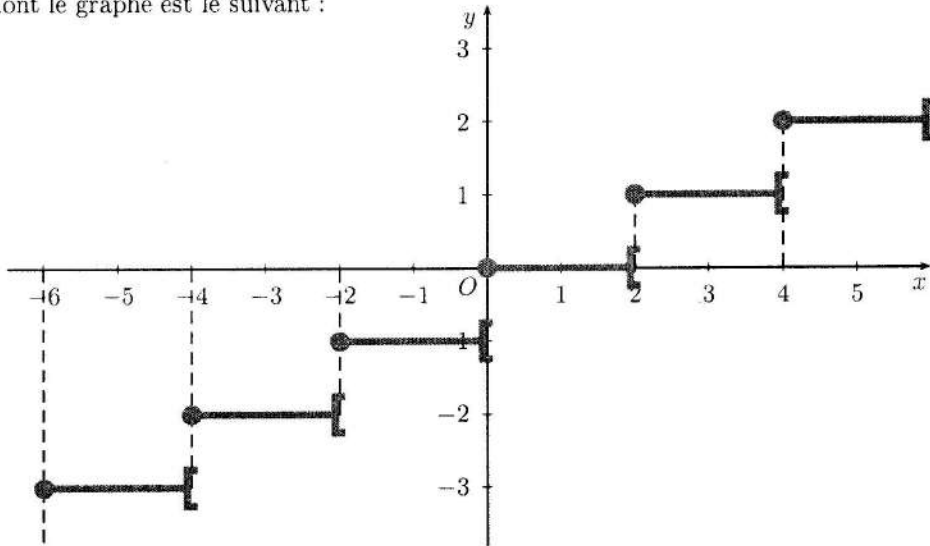
Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (2,5 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est le suivant :



Déterminer $f([0, 4])$, $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}(\{0, 1\})$, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([-1, 1])$.

Exercice 2 (1,5 points)

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = \frac{n}{2}$ si n pair et $f(n) = 0$ sinon.

Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.

Exercice 3 (2 points)

Soient f et g les fonctions définies par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{\arctan(\sqrt{x})} \\ g(x) = x^x \end{cases}$. Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$ (sans se préoccuper du domaine de définition).

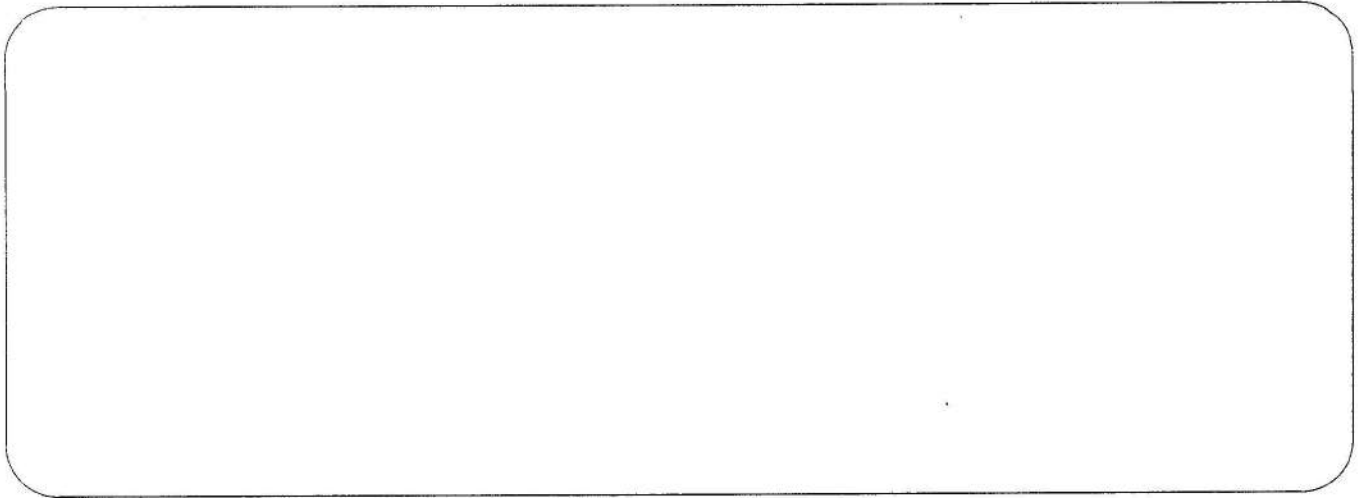
N.B. : n'essayez pas de simplifier les résultats.

Exercice 4 (4 points)

1. Déterminer, sans intégration par parties ni changement de variable, $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x+4)^2} dx$.

2. Via une intégration par parties, déterminer $J = \int_1^e \ln(x) dx$ puis via une nouvelle intégration par parties, déterminer $K = \int_1^e \ln^2(x) dx$.

3. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$, déterminer $L = \int_1^4 \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

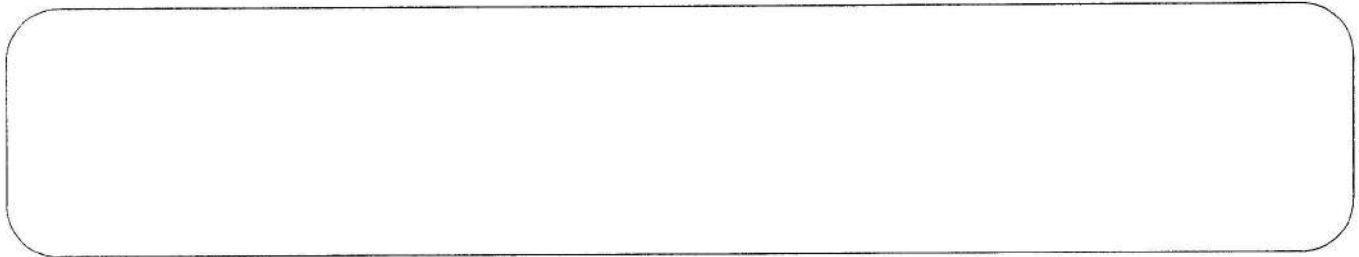


Exercice 5 (3 points)

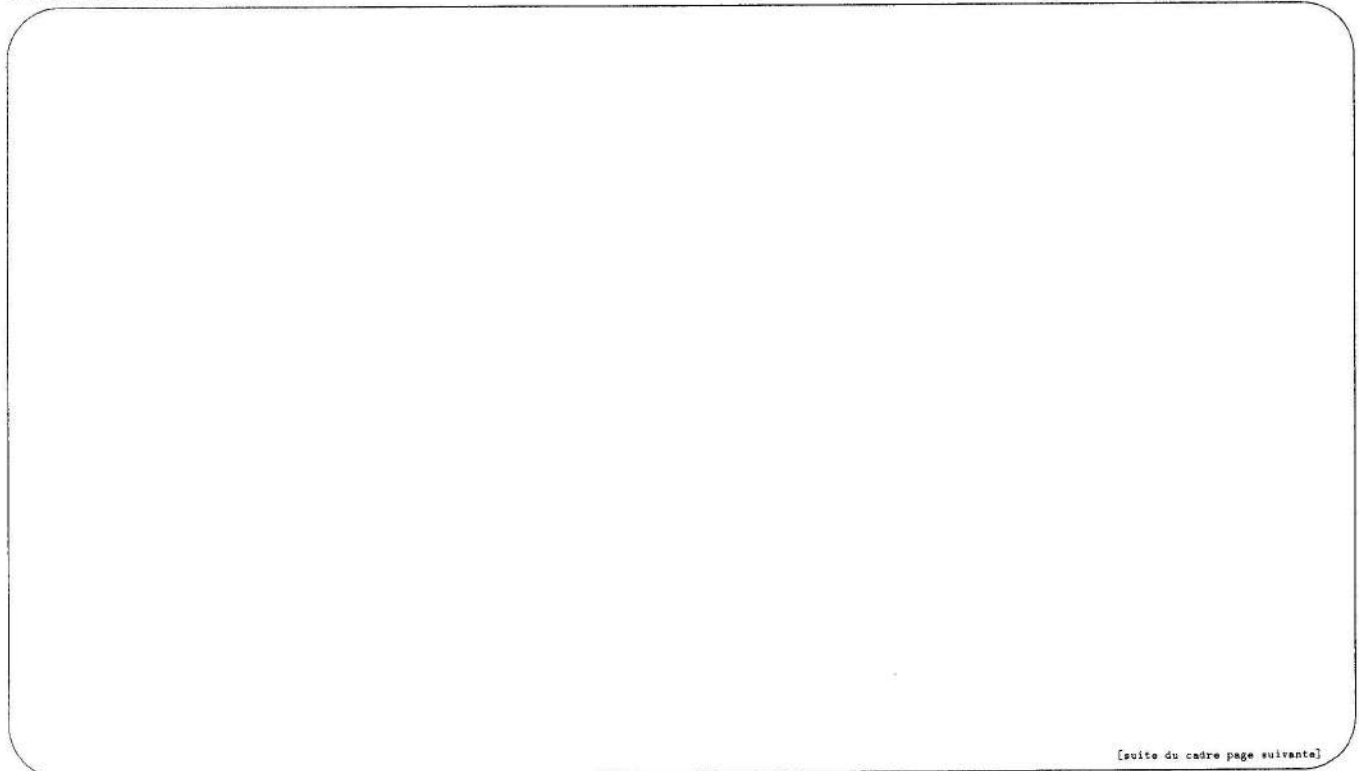
On rappelle dans cet exercice que $13^2 = 169$.

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - 5z + 5 - 3i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 5 + 12i$.



2. Déterminer une racine carrée de Δ .



[suite du cadre page suivante]

3. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) .

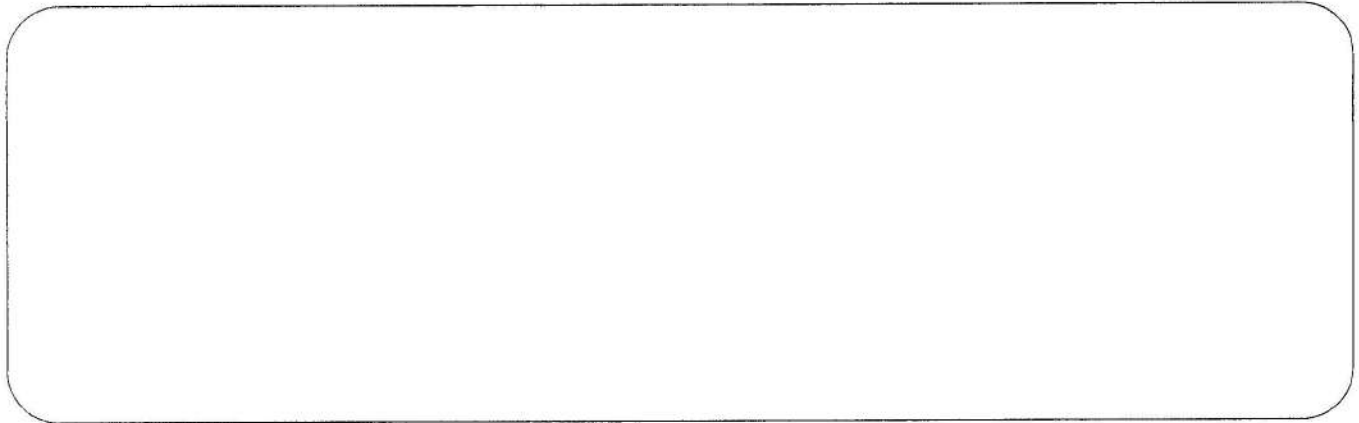
Exercice 6 (3 points)

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto xy \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (x, x^2) \end{cases}$.

1. f est-elle injective? Surjective? Justifiez votre réponse.

2. g est-elle injective? Surjective? Justifiez votre réponse.

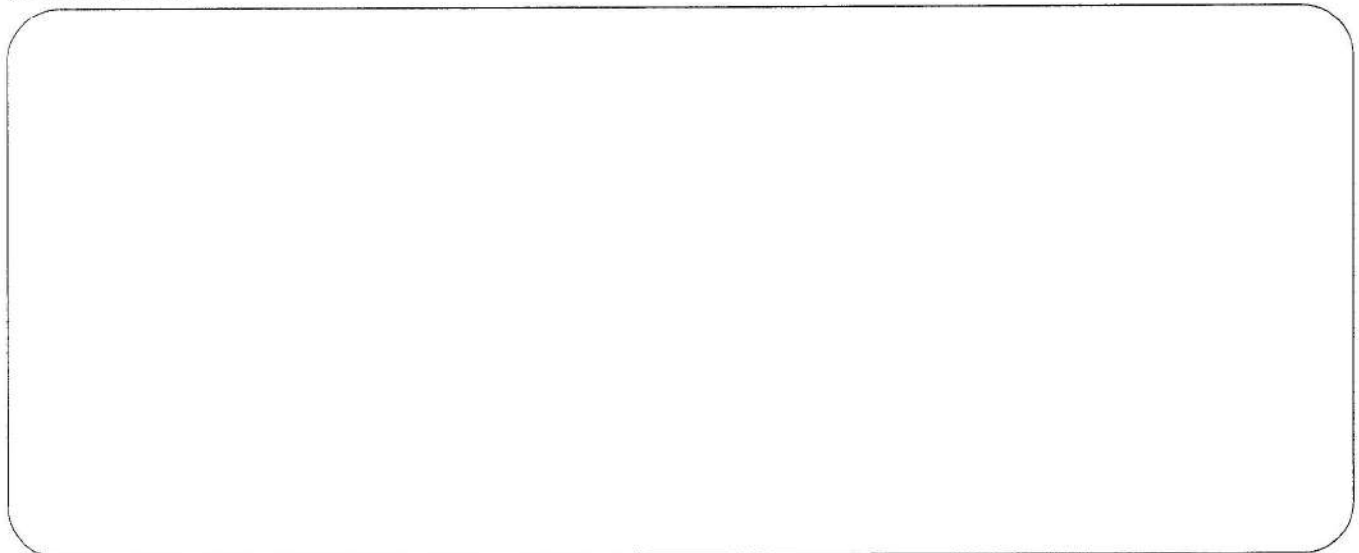
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.



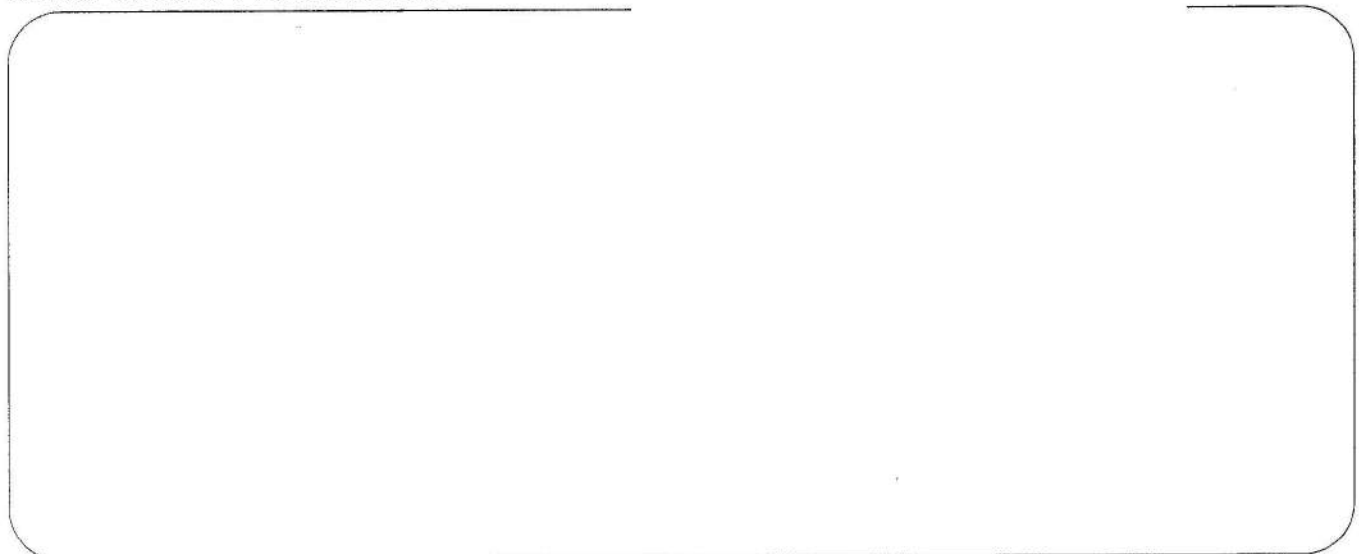
Exercice 7 (2 points)

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Déterminer la probabilité qu'une main contienne

- au moins un As.



- le roi de carreau et 3 trèfles dont l'As.



Exercice 8 (3 points)

En région parisienne, 60% des personnes âgées de plus de 65 ans sont vaccinés contre la grippe. La proportion de malades est de 0,1% parmi les vaccinés et de 10% parmi les non vaccinés.

1. Déterminer le pourcentage de personnes âgées de plus de 65 ans atteintes par la grippe dans cette région.

2. On sélectionne une personne âgée de plus de 65 ans en région parisienne et on constate qu'elle a contracté la grippe. Quelle est la probabilité qu'elle ait été vaccinée ?

N.B. : on demande juste ici la formule littérale permettant de déterminer cette probabilité mais pas l'application numérique.