Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (2 points)

$$\begin{cases} f'(x) = -\dfrac{1}{\Big(\ln\big(\ln(\ln(x))\big)\Big)^2} \cdot \dfrac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \dfrac{1}{\ln(x)} \cdot \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x}} \Big(2016 \sin^{2015}(x)\cos(x) + \ln(2)2^x\Big) \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

1. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2+2i)}{8} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
2. $z_1 = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}$.

   $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

   Ainsi $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{-i\pi/6+i\pi/4} = e^{i\pi/12}$.
3. Via les questions précédentes, $e^{i\pi/12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   donc $\cos(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3 (6 points)

1. Via une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} I &= [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x \\ &= e - [x]_1^e \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Intégrons à présent J par parties en posant $u(x) = \ln^2(x)$ et $v'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} J &= [x\ln^2(x)]_1^e - 2\int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x \\ &= e - 2 \quad \text{car via le calcul précédent } \int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

3. En posant $t = \sqrt{1-x}$, on a $x = 1 - t^2$ donc $\mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$.

   Ainsi $K = \displaystyle\int_1^0 t(1-t^2)(-2t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t^2 - t^4)\mathrm{d}t$

   Donc $K = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$.
4. En posant $t = e^{-x}$, on a $x = -\ln(t)$ donc $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$.

   Ainsi $L = \displaystyle\int_1^{1/e} \frac{1}{\frac{1}{t}+1} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/e}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$

   Donc $L = \big[\ln(1+t)\big]_{1/e}^1 = \ln(2) - \ln(1+1/e)$.

Exercice 4 (3 points)

1. $\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+5i) = 3+4i$.

2. Déterminons une racine de Δ.

   On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 3+4i$. Ainsi $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2+4^2} \\ 2ab = 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ ab > 0 \end{cases}$

   Donc $\delta = 2 + i$ est une racine carrée de $3+4i$.

3. Ainsi $z = \frac{1}{2}(4+3i+2+i)$ ou $z = \frac{1}{2}(4+3i-2-i)$.

   Donc $z = 3+2i$ ou $z = 1+i$.

Exercice 5 (4 points)

1. $\ln(1-x) + e^{2x} = -x - \frac{x^2}{2} + 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.

2. $\frac{\cos(2x)}{1-x} = \cos(2x)(1-x)^{-1} = \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^3)\right)(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))$

   Donc $\frac{\cos(2x)}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 - 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)$

   soit encore $\frac{\cos(2x)}{1-x} = 1 + x - x^2 - x^3 + o(x^3)$.

3. $\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \frac{1 + x - (1-x) + o(x)}{x + o(x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} \underset{0}{\sim} 2$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = 2$.

Exercice 6 (2 points)

Soit $h = f - g$. La fonction h est continue sur $[a,b]$ car f et g le sont.

D'autre part, $h(a) = f(a) - g(a) = g(b) - g(a)$ et $h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - g(b) = -h(a)$.

Donc $h(a)$ et $h(b)$ sont de signe contraire.

Ainsi, via le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $h(c) = 0$ i.e. tel que $g(c) = f(c)$.