EPITA

Mathématiques

Examen S1B1 OBM

durée : 2 heures

Octobre 2026

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 4 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : logique (13 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Traduire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs :

   a) « Il n'existe pas d'entier naturel plus petit que -3. » : .....

   b) « Certains réels sont strictement supérieurs à tous les autres. » : .....

   c) « Tout entier naturel est impair. » : .....

   d) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. « Si deux réels sont distincts alors leurs images sont distinctes. » :

   .....

2. On considère les deux assertions suivantes :

$$A : \text{« } \forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ n^2 < m \text{ »} \quad \text{et} \quad B : \text{« } \exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n^2 < m \text{ ».}$$

   (a) A est-elle vraie ? Justifier.

   .....

   .....

   (b) B est-elle vraie ? Justifier.

   .....

   .....

   .....

   (c) Écrire la négation de A.

   .....

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère l'assertion P

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \geq y \implies f(x) \geq f(y))$$

   (a) Donner l'exemple d'une fonction vérifiant cette assertion et l'exemple d'une fonction ne la vérifiant pas.

   .....

   .....

   (b) Écrire la négation de P.

   .....

   (c) Écrire la contraposée.

   .....

   (d) Quelle propriété décrit l'assertion P pour f ?

   .....

4. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mettre le symbole $\implies$, $\impliedby$ ou $\iff$ à la place des pointillés :

   (a) $|x^2 - 3| < 2$ ..... $x^2 - 3 < 2$ (b) $x^2 - 2x + 1 > 0$ ..... $x > 1$

   (c) $\cos(x) > 0$ ..... $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (d) $x(y + 2) = 0$ ..... $(x = 0$ et $y = -2)$

   (e) $e^{x+y} = 1$ ..... $x = -y$ (f) $\tan(x) = 0$ ..... $x = 0$

5. On considère les deux assertions suivantes :

   P : « Avoir son examen » et Q : « Travailler régulièrement ».

   (i) Écrire sous forme d'implication faisant intervenir P et Q les phrases suivantes :

   a) « Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement » : .....
   b) « Pour avoir ton examen, il est nécessaire de travailler régulièrement » : .....
   c) « Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen » : .....
   d) « Pour avoir ton examen, il suffit de travailler régulièrement » : .....
   e) « Si tu n'as pas ton examen, alors tu n'as pas travaillé régulièrement » : .....

   (ii) Parmi a), b), c), d) et e), y a-t-il des propositions équivalentes ? Si oui, lesquelles ? (justifier)

   .....

   .....

Exercice 2 : ensembles (8,5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{-2, 3\}$.

   (a) Écrire en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

   .....

   (b) Écrire en extension l'ensemble $E \times F$.

   .....

   (c) Écrire en extension l'ensemble $F \times E$.

   .....

   (d) Pour A et B deux ensembles finis, rappeler la formule donnant $\text{Card}(A \cup B)$. À l'aide de cette formule, trouver $\text{Card}\big((E \times F) \cup (F \times E)\big)$.

   .....

   .....

   .....

   .....

2. Soient $A = [0, 4]$, $B =]-2, 1]$.

   Compléter les expressions suivantes pour qu'elles soient vraies en utilisant un des ensembles suivants : $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $A \times B$, $B \times A$ sachant que chacun de ces ensembles ne peut être utilisé qu'une fois au plus.

   a) $(\pi, 1) \in$ ....., b) $\{6, 8\} \subset$ ....., c) $[-1, 3] \subset$ ....., d) $\{3\} \in$ ....., e) $]0, 1[\subset$ .....

3. On considère les ensembles $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$ et $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$.

   (a) Donner une fonction qui est dans A et une fonction qui n'est pas dans A. Ne pas justifier.

   .....

   .....

(b) Donner une fonction qui est dans B et une fonction qui n'est pas dans B. Ne pas justifier.

.....

.....

(c) A-t-on $A \subset B$? Justifier.

.....

.....

.....

(d) A-t-on $B \subset A$? Justifier.

.....

.....

.....

Exercice 3 : fonctions et ensembles (11 points)

1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

   (a) Soit $A \subset E$. Donner la définition mathématique de $f(A)$.

   .....

   (b) Soit $B \subset F$. Donner la définition mathématique de $f^{-1}(B)$.

   .....

2. Application 1. Soient $f : x \longmapsto x^2$ et $A = [-3, 4]$.
   $f(A) =$ ..... et $f^{-1}(A) =$ .....

3. Application 2 : compléter le tableau suivant.

   N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon ! "exp" est la fonction exponentielle et "cos" la fonction cosinus.

f	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$\cos : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f\left(]0, \frac{\pi}{2}]\right) =$		
$f\left(\{0, \frac{\pi}{4}\}\right) =$		
$f^{-1}\left(\{0\}\right) =$		
$f^{-1}\left(]0, +\infty[\right) =$		

4. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \times m \end{array} \right.$

(a) Rappeler les définitions mathématiques suivantes dans ce contexte-là :
f est injective de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$:

.....

f est surjective de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$:

.....

(b) f est-elle injective ? Justifier.

.....

.....

(c) f est-elle surjective ? Justifier.

.....

.....

.....

5. Construire une fonction $g : I \longrightarrow J$ bijective, avec I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de cardinal supérieur ou égal à 3 à définir.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4 : raisonnements (7,5 points)

Les questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, on attend de vous de rédiger proprement en respectant les règles vues en séminaire.

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right.$

(a) Montrer que $\forall y \in [0,+\infty[,\ \exists x \in [1,+\infty[,\ y = f(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Montrer que : $\forall (x, x') \in [1, +\infty[^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$.

(c) f est-elle bijective de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$? Si oui, donner f^{-1}.

2. Soient A et B deux ensembles non vides.

(a) Que signifie $A \subset B$ avec des quantificateurs ?

(b) Supposons que $A \cap B = A$. Montrer, par l'absurde, que $A \subset B$.

(c) A-t-on $A \cap B = A \iff A \subset B$? Justifier.