EPITA

Mathématiques

Examen S1-B1 DP

durée : 2 heures

Octobre 2026

Nom : .....

Prénom : .....

Classe : .....

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : autour du cours et du TD (8 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) Soient E, F et G trois ensembles finis non vides. On suppose que E et F forment une partition de G. Rappelez ce que cela signifie. Donner le cardinal de G en fonction de celui de E et de F.

   .....

   .....

   .....

   .....

   (b) Soient A et B deux ensembles finis tels que $A \subset B$. Montrer que $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$.

   .....

   .....

   (c) Soient M et N deux ensembles finis quelconques. On appelle différence symétrique de M et N l'ensemble, noté $M\Delta N$, défini par $M\Delta N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$.

   Représenter dans un diagramme les ensembles M, N et y hachurer la zone correspondant à $M\Delta N$. Montrer que

   $$\text{Card}(M\Delta N) = \text{Card}(M) + \text{Card}(N) - 2 \times \text{Card}(M \cap N),$$

   en utilisant des formules du cours si besoin.

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

2. Dans un jeu de 32 cartes, on ne retient que les 8 cœurs et les 8 carreaux et on retire les autres cartes. Nous avons donc un paquet de 16 cartes (rouges).

   On tire simultanément 7 cartes de ce paquet, ce qui constitue une main.

   (a) Soit N le nombre de mains possibles. Que vaut N ?

   .....

   (b) Soit N_1 le nombre de mains sans l'as de carreau. Que vaut N_1 ?

   .....

   .....

   (c) Soit N_2 le nombre de mains avec l'as de carreau. Que vaut N_2 ?

   .....

   .....

   (d) Trouver (sans calcul) la relation entre N, N_1 et N_2. Expliquer.

   .....

   .....

   .....

(e) Démontrer la relation trouvée dans la question précédente par le calcul.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 : dénombrement 1 (8 points)

Dans cet exercice, sauf mention contraire, l'application numérique exacte n'est pas demandée. Seule la formule appliquée aux données de l'exercice est attendue.

On considère l'ensemble $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Cet ensemble est donc composé de 8 lettres...

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « BABABC » ? (Faire le calcul jusqu'au bout)

   .....

   .....

2. Considérons $\mathcal{N}$ l'ensemble des mots de 5 lettres construits à partir des éléments de $\mathcal{M}$, **avec répétition**, comme par exemple le mot « HAHBC ».

   (a) Quel est le cardinal de $\mathcal{N}$? Justifier brièvement.

   .....

   .....

   .....

   (b) Combien y a-t-il de mots contenant au moins une fois la lettre A dans $\mathcal{N}$? Justifier brièvement.

   .....

   .....

   .....

   .....

   (c) Combien y a-t-il de mots se terminant par une voyelle dans $\mathcal{N}$? Justifier brièvement.

   .....

   .....

   .....

   .....

   (d) Combien y a-t-il de mots avec exactement deux A dans $\mathcal{N}$? Justifier brièvement.

   .....

   .....

   .....

3. Considérons $\mathcal{P}$ l'ensemble des mots de 5 lettres construits à partir des éléments de $\mathcal{M}$, **sans répétition**, comme par exemple le mot « ABCDE ».

   (a) Quel est le cardinal de $\mathcal{P}$? Justifier brièvement.

   .....

   .....

   .....

(b) Combien y a-t-il de mots ne possédant qu'une et une seule voyelle dans $\mathcal{P}$? Justifier brièvement.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 : dénombrement 2 (3,5 points)

Considérons une assemblée de 40 personnes composée de 25 femmes et 15 hommes.
On veut compter le nombre de groupes possibles de 8 personnes dans cette assemblée.

1. Donner N le nombre de groupes possibles de 8 personnes.

   .....

2. Donner N_j le nombre de groupes de 8 personnes composés de j femmes exactement. Vous préciserez les valeurs possibles de j. Justifier brièvement.

   .....

   .....

   .....

3. En additionnant tous les N_j possibles, quel résultat obtient-on ?

   .....

   .....

Exercice 4 : probabilités conditionnelles et variable aléatoire (7 points)

N.B. : dans cet exercice, pour les questions 1. et 2. vous justifierez vos résultats à l'aide d'une formule du cours. Vous donnerez vos résultats sous forme de fraction simplifiée.

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, il n'y a pas d'erreur dans 80 % des cas.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.
On considère les évènements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

1. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle. On notera p cette probabilité si besoin par la suite.

2. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée.

3. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

   (a) Donner explicitement la loi de X (c'est-à-dire donner $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$), en expliquant brièvement.

   (b) Justifiez, par le calcul, que $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

   (c) Donner l'espérance et la variance de X.

   (d) Expliquez comment vous calculeriez la probabilité qu'au moins deux erreurs soient détectées, sans mener les calculs jusqu'au bout.

Exercice 5 : cours (5 points)

Soient X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de X respectivement notées : $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2. Exprimer $E(aX + b)$ en fonction de a, b et $E(X)$. Démontrer cette formule.

3. Exprimer $\mathrm{Var}(aX + b)$ en fonction de a, b et $\mathrm{Var}(X)$. Démontrer cette formule.

Exercice 6 : variables aléatoires (8,5 points)

Les trois questions sont indépendantes.

Dans une urne, on a 3 boules blanches et 2 boules vertes indiscernables au toucher.

1. Proposer une expérience simple avec cette urne qui amène à la création d'une variable X de Bernoulli (vous justifierez votre choix).

2. Proposer une expérience simple avec cette urne qui amène à la création d'une variable Y binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{2}{5}$ (justifier).

3. On extrait une à une les boules de l'urne jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de boules dans l'urne.
   Soit Z la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche tirée.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ? Justifier brièvement.

   (b) Donner la loi de Z.

   (c) Calculer l'espérance de Z.

   (d) Calculer la variance de Z.

   (e) Donner l'espérance et la variance de $T = 3Z - 1$.