EPITA

Mathématiques

Examen S1B1 OBM

durée : 2 heures 30

Octobre 2025

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : logique (12 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit a et b deux réels. On considère les assertions :

   P_1 : « $a = b$ », P_2 : « $a^2 = b^2$ », P_3 : « $a = -b$ », P_4 : « $(a-b)(a+b) = 0$ », P_5 : « $a = b$ ou $a = -b$ »

   et P_6 : « $a = 0$ ou $b = 0$ »

   (a) Quelles sont les implications du type $P_1 \Longrightarrow \ldots\ldots\ldots$ vraies pour tous a et b réels ?

   .....
   .....

   (b) Parmi les assertions P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6, identifier celles qui impliquent P_1 pour tous réels a et b.

   .....
   .....

   (c) Parmi les assertions P_1, P_3, P_4, P_5 et P_6, identifier celles qui impliquent P_2 pour tous réels a et b.

   .....
   .....

   (d) Parmi les assertions P_1, P_3, P_4, P_5 et P_6, identifier celles qui sont équivalentes à P_2 pour tous réels a et b.

   .....
   .....

2. Traduire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes en indiquant si elles sont vraies ou fausses et en justifiant.

   (a) « Le carré de tout réel est positif »

   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré »

   .....
   .....
   .....
   .....

   (c) « Il y a un réel égal au carré de tous les autres »

   .....
   .....
   .....
   .....

3. On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ l'ensemble des nombres rationnels.

   Soit l'assertion « (P) : $\forall\, (p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ (p < q \implies (\exists\, c \in \mathbb{Q},\, p < c < q\,))$ »

   (a) Démontrer que l'assertion (P) est vraie par un raisonnement direct en prenant grand soin de votre rédaction.

   Indice : on pourra penser à $\frac{p+q}{2}$

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) Donner la négation de (P).

   .....

4. Soient $A = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 5\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z}, (x-1)(x-5) \geq 0\}$. On note $\overline{B}$ le complémentaire de B dans $\mathbb{Z}$.

   (a) Remplir les pointillés pour que la phrase mathématique soit correcte :

   a) ..... $\in A$, b) ..... $\notin A \cup B$, c) ..... $\in A \cap B$, d) ..... $\subset \overline{B}$

   (b) De quel ensemble commun A et B sont-ils des sous-ensembles ?

   .....

   (c) Montrer que $A \subset B$. Rédiger en suivant les règles de rédaction vues en séminaire.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

   (d) A-t-on $B \subset A$? Justifier.

   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 2 : ensembles et fonctions 1 (4,5 points)

1. Soient F et G deux ensembles et $f : F \longrightarrow G$

   (a) Rappeler la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est injective de F vers G »

   .....
   .....

   (b) Rappeler la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est surjective de F vers G »

   .....
   .....

2. Soient $E = \{2, 3, 4\}$. On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \text{Card}(A) \end{array}$

   (a) Donner $\mathcal{P}(E)$

   .....

   (b) Remplir ci-dessous le tableau de valeurs de la fonction f :

A	
$f(A)$	

   (c) f est-elle injective ? Justifier.

   .....
   .....
   .....

   (d) f est-elle surjective ? Justifier.

   .....
   .....
   .....

   (e) Déterminer $I \subset \mathcal{P}(E)$ et $J \subset \mathbb{N}$ tels que $f : I \longrightarrow J$ soit injective, non surjective. (Les ensembles I et J doivent contenir au moins deux éléments).

   .....
   .....
   .....
   .....

   (f) Déterminer $I' \subset \mathcal{P}(E)$ et $J' \subset \mathbb{N}$ tels que $f : I' \longrightarrow J'$ soit surjective, non injective. (Les ensembles I' et J' doivent contenir au moins deux éléments).

   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 3 : ensembles et fonctions 2 (5 points)

1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.
   (a) Soit $A \subset E$. Donner la définition mathématique de $f(A)$.

   .....

   (b) Soit $B \subset F$. Donner la définition mathématique de $f^{-1}(B)$.

   .....

2. Application 1. On définit la fonction $f : [\![0, 10]\!] \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, n \in [\![0, 10]\!],\ f(n) = n + 1 \text{ si } n \text{ pair et } 0 \text{ sinon}$$

   Donner $f(\{1, 2, 3\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

   .....

3. Application 2 : compléter le tableau suivant.

   N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon ! Bien sûr, la fonction ln est la fonction $x \mapsto \ln(x)$ et la fonction cos est $x \mapsto \cos(x)$.

f	$\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$	$\cos : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$		
$f^{-1}(\{0\})$		
$f^{-1}(\{-1\})$		
$f^{-1}(\,]-\infty, 0])$		

Exercice 4 : relations (4 points)

Soit $E = [\![0, 50]\!]$.

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall\,(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2\,, A\,\mathcal{R}\,B \iff \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$.

1. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est réflexive. Justifier.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est symétrique. Justifier.

3. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est antisymétrique. Justifier.

4. Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est transitive. Justifier.

Exercice 5 : intégrales (5,5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer directement avec une primitive : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

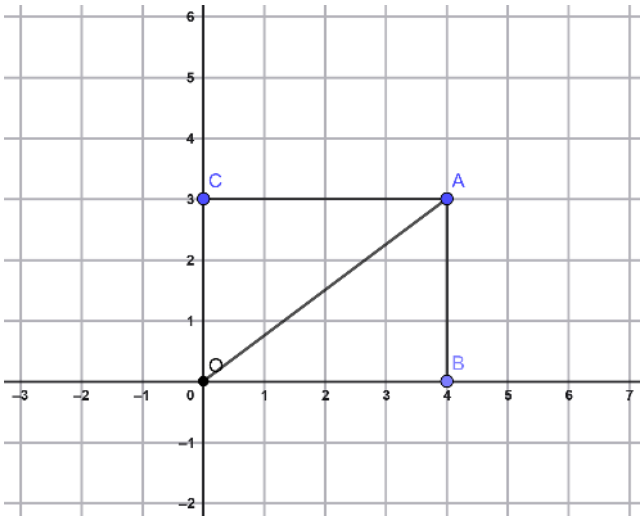
2. Via une intégration par parties, calculer $J = \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$. Vous poserez clairement les fonctions u, u', v et v' et vous mettrez en évidence la formule.

3. Calculer $K = \int_1^e \frac{1}{t\ln(t)+t}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \ln(t)$.

Exercice 6 : nombres complexes (9 points)

Partie 1 : questions de cours

On se place dans la plan complexe ci-dessous, où sont représentés trois points A d'affixe z_A, B d'affixe z_B et C d'affixe z_c ainsi que O l'origine du repère :



Remplacer les pointillés par une réponse correcte :

1. $z_A =$ ....., $z_C =$ ....., $z_B =$ ..... (expressions algébriques).
2. Le conjugué de z_A est ..... et celui de z_B est ..... (notation et expression algébrique)
3. L'ensemble des nombres complexes se note : .....
4. Le module de z_A est noté ..... et il est égal à ..... (faire le calcul)
5. Que représente graphiquement le module de z_A ? .....
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z_A (qu'on ne vous demande pas de déterminer explicitement).

   On a, dans notre cas : $\cos(\theta) =$ et $\sin(\theta) =$
7. L'écriture exponentielle de z_A est (en fonction de θ) :
8. Sur le dessin, indiquer graphiquement un argument de z_A

Partie 2 : exercices types (Ils sont indépendants)

1. Donner la forme algébrique de $z = i(6 - 2i) + (-3 - 2i)$

   .....
   .....
   .....
   .....

2. Soient $z_1 = -4 + 3i$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Donner $|z_1|$, $|z_2|$ et $|z_1 \times \overline{z_2}|$.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

3. Donner la forme trigonométrique ou exponentielle de $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et z_2^3.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $-z^2 - \sqrt{3}z - 1 = 0$.