EPITA

Mathématiques

Examen S1-B1 DP

durée : 2 heures

Octobre 2025

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : autour du cours et du TD (7 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans une classe de 40 élèves, 25 parlent couramment l'anglais, 11 parlent couramment l'espagnol et 6 ne parlent ni anglais, ni espagnol.

   Par la suite, on note C l'ensemble des élèves de la classe, A l'ensemble de ceux qui parlent anglais et E l'ensemble de ceux qui parlent espagnol.

   (a) Traduire les données de l'énoncé à l'aide des 3 ensembles.

   .....
   .....

   (b) Combien y a-t-il d'élèves qui parlent couramment à la fois l'anglais et l'espagnol ? On vous demande de justifier votre résultat à l'aide de formule(s) du cours que vous rappellerez.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. Autour du binôme de Newton

   (a) Énoncer la formule du binôme de Newton.

   .....
   .....

   (b) Application : soit E un ensemble à n éléments.

   i. Combien y a-t-il de sous-ensembles de E à k éléments ?

   .....
   .....

   ii. En utilisant les questions précédentes (2.(a) et 2.(b)(i)), calculer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 2 : dénombrement 1 (7 points)

Un QCM comporte 5 questions. Pour chacune des 5 questions, il y a 6 propositions de réponses : A, B, C, D, E ou F. Pour chaque question, il n'y a qu'une seule réponse correcte.

On suppose qu'un candidat passant ce qcm répond à toutes les questions posées en écrivant un « mot réponse » de 5 lettres prises parmi A, B, C, D, E et F.

Par exemple, le mot réponse « BBADC » signifie que le candidat a répondu B aux questions 1 et 2, A à la question 3, D à la question 4 et C à la question 5.

Sauf mention contraire dans la question, le mot réponse peut avoir plusieurs fois la même lettre.

1. Combien y a-t-il de mots réponses possibles ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....

2. Combien y a-t-il de mots réponses n'ayant que des lettres distinctes ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....

3. Combien de mots réponses possibles ne contenant qu'une seule réponse correcte y a-t-il ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....

4. Combien de mots réponses avec au moins une réponse correcte y a-t-il ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....

5. Combien de mots réponses commençant par E, sans A et composés de lettres distinctes y a t-il ? Justifier brièvement. Faire le calcul jusqu'au bout.

   .....
   .....
   .....
   .....

6. Il y a eu des fuites. On sait que le mot réponse contient un B, deux C et deux D. Combien y a-t-il de mots réponses possibles ? Justifier brièvement. Faire le calcul jusqu'au bout.

   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 3 : dénombrement 2 (4,5 points)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur à 2 et k est un entier naturel inférieur à n.

Ousmane est blessé. Pour passer le temps, il imagine un ensemble de n joueurs. Il décide alors de compter le nombre d'équipes possibles composées de k joueurs avec un capitaine parmi eux.

Pour cela, il va compter ce nombre de deux façons différentes.

- Première façon : Ousmane choisit d'abord les k joueurs puis il choisit le capitaine parmi eux.
- Deuxième façon : Ousmane choisit d'abord le capitaine puis les autres joueurs.

1. Quel est le nombre N_1 d'équipes quand Ousmane utilise la première façon ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....

2. Quel est le nombre N_2 d'équipes quand Ousmane utilise la deuxième façon ? Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....

3. Vous venez de démontrer une formule. Laquelle ?

   .....
   .....

4. Redémontrer cette formule par le calcul.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 4 : probabilités conditionnelles (4 points)

Au restaurant « Je donne tout », on constate que 15% des clients mangent « à la carte » et 85% choisissent un menu. Parmi les clients qui mangent « à la carte », 30% prennent un dessert, contre 45% des clients qui choisissent un menu.

On note C l'événement « Le client mange à la carte », M : « Le client choisit le menu » et D : « Le client prend un dessert ».

N.B. : vous justifierez vos résultats à l'aide d'une formule du cours.

1. On choisit au hasard un client. Quelle est la probabilité que ce client ait mangé un dessert ?

   Vous donnerez votre résultat sous forme de pourcentage ou de fraction simplifiée

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. On choisit au hasard un client qui a pris un dessert. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi la formule « à la carte »

   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 5 : cours (5 points)

Soient X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de X respectivement notées : $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   .....
   .....

2. Exprimer $E(aX + b)$ en fonction de a, b et $E(X)$. Démontrer cette formule.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

3. Exprimer $\mathrm{Var}(aX + b)$ en fonction de a, b et $\mathrm{Var}(X)$. Démontrer cette formule.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

Exercice 6 : variables aléatoires (12,5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

On lance un dé classique et équilibré. Si le résultat est 1, 3 ou 4, on ne marque rien. Si le résultat est 2 ou 6, on marque 1 point. Si le résultat est 5, on gagne 2 points. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus lors d'un lancer.

1. Donner la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Soit $Y = 2X + 1$. Quelle est la loi de Y, son espérance et sa variance ?

Partie B :

Une urne contient n boules blanches et 3 boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne.

1. Déterminer n pour que la probabilité d'avoir une boule rouge soit égale à $\frac{3}{11}$.

2. On suppose $n = 6$. Si la boule tirée est blanche, on marque 1 point, sinon on marque aucun point. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenu sur ce tirage.

   (a) Donner la loi de Y son espérance et sa variance.

   (b) On effectue 8 tirages successifs, dans les mêmes conditions. Ces tirages sont supposés indépendants. Pour $k \in [\![1, 8]\!]$, on note Y_k le nombre de points obtenus au k-ième tirage.

   On note $Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_8$.

   i. Donner $Z(\Omega)$ ainsi que $P(Z = i)$ pour tout $i \in Z(\Omega)$. Vous justifierez vos résultats.

   ii. Trouver $P(Z \leq 7)$. Simplifier le plus possible votre résultat.