Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (2 points)

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln^{10}\big(\sin(x)\big)+1}} \cdot 10\ln^{9}\big(\sin(x)\big)\cdot\dfrac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x) \\ \\ g'(x) = \cos\big(\arctan(\sqrt{x})\big)\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

Exercice 2 (3 points)

1. $z^2 = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\pi/6}$.

2. $z = re^{i\theta}$ où r et θ sont respectivement le module et un argument de z.

   $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ d'où, via la question précédente, $r^2 = 8$ et $2\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   Comme r est nécessairement strictement positif, $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$, le module et un argument de z sont respectivement $2\sqrt{2}$ et $-\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (6 points)

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big[\arctan^2(x)\big]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$.

2. Via une intégration par parties, en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, on a

$$\begin{aligned} J = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

3. Via le changement de variable $u = \ln(t)$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ donc

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \big[\arctan(u)\big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4. Via le changement de variable $u=\sqrt{x}$, $x=u^2$ donc $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Ainsi

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u}\,2u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^1 u(1-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{car } 1-u^2=(1+u)(1-u) \\ &= 2\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points)

1. $\Delta = (5+3i)^2 - 4(2+9i) = 8-6i$.

2. Déterminons une racine de Δ.

   On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = 8-6i$. Ainsi $\begin{cases} a^2-b^2=8 \\ a^2+b^2=\sqrt{8^2+(-6)^2} \\ 2ab=-6 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a^2-b^2=8 \\ a^2+b^2=10 \\ ab<0 \end{cases}$

   Donc $\delta = 3-i$ est une racine carrée de $8-6i$.

3. Ainsi $z=\frac{1}{2}(5+3i+3-i)$ ou $z=\frac{1}{2}(5+3i-3+i)$.

   Donc $z=4+i$ ou $z=1+2i$.

Exercice 5 (4 points)

1. $$\begin{aligned} e^x\ln(e+ex) &= e^x\ln\big(e(1+x)\big) \\ &= e^x\big(1+\ln(1+x)\big) \\ &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}+x+x^2+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \\ &= 1+2x+x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \big(1+\sin(x)\big)^{1/x} &= e^{\ln(1+\sin(x))/x} \\ &= e^{\ln(1+x+o(x))/x} \\ &= e^{(x+o(x))/x} \\ &= e^{1+o(1)} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{1/x} = e$.

3.
$$\begin{aligned}
\frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + o(x^2)\right)}{x^2} \\
&= \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} \\
&= 1 + o(1)
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 1$.

Exercice 6 (2 points)

Soit g la fonction définie pour tout $x \in [0, 1/2]$ par $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

g est continue sur $[0, 1/2]$ car f l'est sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$.

D'autre part, $g(0) = f(0) - f(1/2)$ et $g(1/2) = f(1/2) - f(1) = f(1/2) - f(0) = -g(0)$.

Ainsi, comme g est continue sur $[0, 1/2]$ et $g(0)$, $g(1/2)$ de signes contraires, on en déduit, via le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in [0, 1/2]$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.