Algorithmique
Types algébriques abstraits

Sup S1 Epita

Examen

27 octobre 2026

Consignes (à lire) :

- Vous devez répondre sur **les feuilles de réponses prévues à cet effet**.
  - **Indiquez de manière lisible votre NOM (en MAJUSCULES), prénom, UID et classe sur chaque feuille.**
  - Répondez dans les espaces prévus, **les réponses en dehors ne seront pas corrigées**.
  - Ne pas utiliser de crayon de papier, de stylo effaçable, de correcteur blanc (tippex, blanco...).
- Le barème n'est pas nécessairement définitif. Des points de présentation peuvent être retirés.
- Durée : 1h00

Exercice 1 (Listes itératives : opération mystère – *7 points*)

On considère la signature du type abstrait algébrique *liste itérative* vu en cours et dont voici un extrait.

TYPES
liste

UTILISE
élément, entier

OPÉRATIONS

liste-vide	:	$\rightarrow$ liste
ième	:	liste $\times$ entier $\rightarrow$ élément
longueur	:	liste $\rightarrow$ entier

On définit l'opération mystère suivante :

OPÉRATIONS
mystère : liste $\rightarrow$ liste $\times$ liste

AXIOMES

$$\text{mystère}(l) = (l_1, l_2) \implies \begin{cases} \text{longueur}(l_1) = \lfloor \text{longueur}(l)/2 \rfloor \\ \text{longueur}(l_2) = \lceil \text{longueur}(l)/2 \rceil \end{cases}$$

$$1 \leq n \leq \lfloor \text{longueur}(l)/2 \rfloor \;\&\; \text{mystère}(l) = (l_1, l_2) \implies \text{ième}(l, n) = \text{ième}(l_1, n)$$

$$\lfloor \text{longueur}(l)/2 \rfloor + 1 \leq n \leq \text{longueur}(l) \,\&\, \text{mystère}(l) = (l_1, l_2) \Rightarrow \text{ième}(l, n) = \text{ième}\big(l_2, n - \lfloor \text{longueur}(l)/2 \rfloor\big)$$

AVEC

liste	l, l_1, l_2
entier	n

Note : $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x. De façon similaire, $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x.

$$\begin{cases} (\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil) \in \mathbb{Z}^2 \\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \end{cases}$$

En particulier :

$$\lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0 \quad \lceil \tfrac{1}{2} \rceil = \lceil 0.5 \rceil = 1$$
$$\lfloor \tfrac{2}{2} \rfloor = \lfloor 1.0 \rfloor = 1 \quad \lceil \tfrac{2}{2} \rceil = \lceil 1.0 \rceil = 1$$
$$\lfloor \tfrac{3}{2} \rfloor = \lfloor 1.5 \rfloor = 1 \quad \lceil \tfrac{3}{2} \rceil = \lceil 1.5 \rceil = 2$$

Remplissez le tableau sur la feuille de réponse :

Pour chaque liste l proposée, donner les listes résultantes après application de l'opération mystère à l.

Exercice 2 (Listes récursives : fusion – *6 points*)

On considère la signature du type abstrait algébrique *liste récursive* vu en cours et dont voici un extrait.

TYPES
liste

UTILISE
élément

OPÉRATIONS

liste-vide	:	$\rightarrow$ liste
cons	:	élément $\times$ liste $\rightarrow$ liste
premier	:	liste $\rightarrow$ élément
fin	:	liste $\rightarrow$ liste

PRÉCONDITIONS
premier(l) est-défini-ssi $l \neq$ liste-vide
fin(l) est-défini-ssi $l \neq$ liste-vide

AXIOMES
premier(cons(e, l)) $= e$
fin(cons(e, l)) $= l$

AVEC

liste	l
élément	e

Ici, les éléments sont ordonnables.
On souhaite ajouter l'opération *fusion* qui, à partir de deux listes l_1 et l_2 triées en ordre croissant, renvoie une nouvelle liste triée elle aussi en ordre croissant et contenant tous les éléments de l_1 et l_2 réunis.

OPÉRATIONS
fusion : liste $\times$ liste $\rightarrow$ liste

Exemples :

— fusion($\{1, 1, 5, 7\}, \{2, 2, 6, 8\}$) $= \{1, 1, 2, 2, 5, 6, 7, 8\}$

— fusion($\{1, 4, 5, 10\}, \{0, 1, 3, 5\}$) $= \{0, 1, 1, 3, 4, 5, 5, 10\}$

Sur la feuille de réponses, donner les axiomes pour définir l'opération *fusion* de manière complète et consistante. Vous préciserez les PRÉCONDITIONS s'il y en a.

Exercice 3 (Piles et files : collier – *8 points*)

Un professeur facétieux a mélangé les types *pile* et *file*, et a renommé toutes les opérations avec des noms farfelus.

TYPES

collier

UTILISE

perle

OPÉRATIONS

ficelle	:	$\to$ collier
it	:	collier $\times$ perle $\to$ collier
ot	:	collier $\to$ collier
ob	:	collier $\to$ collier
et	:	collier $\to$ perle
eb	:	collier $\to$ perle

PRÉCONDITIONS

ot(n) est-défini-ssi $n \neq$ ficelle
ob(n) est-défini-ssi $n \neq$ ficelle
et(n) est-défini-ssi $n \neq$ ficelle
eb(n) est-défini-ssi $n \neq$ ficelle

AXIOMES

① $\text{et}(\text{it}(n, p)) = p$
② $\text{eb}(\text{it}(\text{ficelle}, p)) = p$
③ $n \neq \text{ficelle} \implies \text{eb}(\text{it}(n, p)) = \text{eb}(n)$
④ $\text{ot}(\text{it}(n, p)) = n$
⑤ $\text{ob}(\text{it}(\text{ficelle}, p)) = \text{ficelle}$
⑥ $n \neq \text{ficelle} \implies \text{ob}(\text{it}(n, p)) = \text{it}(\text{ob}(n), p)$

AVEC

collier	n (comme *necklace*, « collier » en anglais)
perle	p

Sur la feuille de réponses :

1. En appliquant les axiomes indiqués, simplifiez au maximum chaque expression.

2. Seriez-vous maintenant capable d'identifier les opérations des types *pile* et *file* ?
   Pour chaque opération, indiquer à quelle opération du type pile ou file elle correspond.