# EPITA

# Mathématiques

## Examen S1B2-SR

## Suites réelles

## durée : 1 heure 30

### Janvier 2025

**Nom :**

**Prénom :**

**Classe :**

## NOTE :

**Le barème est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par règle de 3**

---

## Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

---

## Exercice 1 : suites adjacentes (7 points)

Soient les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par : $u_0 = 2$, $v_0 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5}$.

Soit $(w_n)$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$.

1. Étude de la suite $(w_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(w_n)$ est géométrique. Préciser sa raison.

   (b) En déduire l'expression de $w_n$ en fonction de $n$.

   (c) De la question précédente, trouver le signe de la suite $(w_n)$.

2. **En utilisant la question précédente**, montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

3. Qu'en déduit-on sur les comportements des deux suites en $+\infty$ ?

........................................................................................................................
........................................................................................................................

4. Soit $(x_n) = (u_n + v_n)$.

   (a) Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$. En déduire l'expression de $x_n$ en fonction de $n$.

   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................

   (b) En déduire la limite de $(u_n)$ et la limite de $(v_n)$.

   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................

## Exercice 2 : étude d'une suite (5 points)

Soit la suite $(u_n)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

1. Étudier la monotonie (sens de variation) de la suite $(u_n)$.

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

2. En encadrant chaque terme de la somme, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{2n-1} \leq u_n \leq 1$.

3. En déduire que $(u_n)$ est bornée en précisant explicitement un majorant et un minorant.

4. Peut-on en déduire si $(u_n)$ converge ? Si oui, donner un encadrement de sa limite $\ell$ le plus précis possible que les données de l'exercice le permettent.

## Exercice 3 : comparaison de suites (7,5 points)

1. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles ne s'annulant pas. Rappeler la définition de : $u_n = o(v_n)$, $(u_n) = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ en $+\infty$.

2. Comparer en $+\infty$ les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$, $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$ en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

   (a) $u_n = -n^3 + n - 2$ et $v_n = -2n^2 + n$.

   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................

   (b) $u_n = e^n + \sqrt{n}$ et $v_n = e^n + e^{-n}$.

   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................

   (c) $u_n = 3^n + 6$ et $v_n = 5^n - 1$.

   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................
   ..........................................................................................................

## Exercice 4 : cours (3 points)

Soit $(u_n)$ une suite.

1. Rappeler la définition de : « $(u_n)$ est bornée »

2. Montrer que : $(u_n)$ converge $\Longrightarrow$ $(u_n)$ bornée.

3. Le réciproque est-elle vraie ? Justifier.

4. Énoncer la contraposée de la proposition de la question 2.

## Exercice 5 : suite récurrente (4,5 points)

Soit $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}u_n^2$ avec $u_0 = \dfrac{3}{2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$. (Vous chercherez à factoriser l'expression que vous calculez).

2. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 < u_n < 2$.

3. Peut-on en déduire le comportement de $(u_n)$ en $+\infty$ ? Si la suite converge, trouver sa limite. Justifier.

**[N'oubliez pas de tourner la page. Il reste un exercice]**

## Exercice 6 : suites extraites (3 points)

Considérons la suite $(u_n) = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$.

1. Que vaut la suite $(u_{3n})$ ?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2. Vers quoi converge la suite $(u_{6n+1})$ ?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

3. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Justifier en citant proprement un résultat de votre cours.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .