EPITA

Mathématiques

Examen S1B2 ARITH

durée : 1 heure 30

Janvier 2025

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par règle de trois.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : autour des nombres premiers (7 points)

Soient $a = 3960$ et $b = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

1. Décomposer a en produit de facteurs premiers.

   ....
   ....

2. Trouver la décomposition en facteurs premiers de $a \wedge b$ et le calculer.

   ....

3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $d \,|\, a$ et $d \,|\, b \iff d \,|\, a \wedge b$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) En déduire la forme générale en produit de facteurs premiers d'un diviseur (positif) commun de a et de b.

   ....
   ....
   ....

   (c) Trouver tous les diviseurs (positifs) communs de a et de b. Combien en avez-vous obtenus ? Expliquer comment retrouver ce nombre via la question précédente.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : équation diophantienne (6 points)

On considère l'équation (E) : $29x + 13y = 3$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Le but de l'exercice est de trouver toutes les solutions de (E).

1. Via l'algorithme d'Euclide, trouver $29 \wedge 13$. En déduire que (E) admet des solutions.

2. Via la question précédente, trouver une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

3. Soit (x, y) une solution quelconque de (E). En utilisant le lemme de Gauss, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 13k$ et $y = y_0 - 29k$.

4. Supposons que $x = x_0 + 13k$ et $y = y_0 - 29k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que (x, y) est solution de (E).

5. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 : autour du cours et de Bézout (6 points)

1. Énoncer soigneusement le théorème de Bézout d'une part pour deux entiers quelconques, d'autre part pour deux entiers premiers entre eux.

2. Application 1 : soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si a et b^2 sont premiers entre eux.

3. Application 2 : soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fraction $F = \dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible.

Exercice 4 : autour du cours et de Fermat (7 points)

Dans cet exercice, on admet que :

- Si p est un nombre premier et n un entier naturel, alors soit $p \wedge n = 1$, soit $p \mid n$.
- si p est un nombre premier et k un entier dans $[\![1, p-1]\!]$ alors $p \mid \binom{p}{k}$.

1. Énoncer ET démontrer le petit théorème de Fermat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Énoncer ET démontrer le petit théorème de Fermat quand p ne divise pas n.

3. Application : quel est le reste de la division euclidienne de $N = 11 \times 12^{43} - 128$ par 7 ? Justifier proprement.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5 : congruence (4 points)

On considère l'équation $(E) : 11x^2 - 7y^2 = 5$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Compléter le tableau suivant (vos réponses doivent être des entiers dans $[\![0, 4]\!]$) :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					
Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

[Ne pas oublier de tournez la page.]

3. En déduire que si (x, y) est une solution de (E) alors x et y sont multiples de 5.

4. Montrer que si x et y sont multiples de 5 alors (x, y) n'est pas solution de (E). Vous commencerez par traduire ce que vous supposez avec des quantificateurs.

5. Donner l'ensemble des solutions de (E).