Correction S1PA B2 PIELD

Exercice 1 : calculs de primitives et intégrales

1. *Remplir le tableau ci-dessous (sans se soucier du domaine de définition des fonctions). f désigne la fonction et F est une primitive de f.*

$f(x) =$	$\ln(2)$	$x^4 + 2x$	e^x	$\sin(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{x}$
$F(x) =$	$x\ln(2)$	$\frac{x^5}{5} + x^2$	e^x	$-\cos(x)$	$\tan(x)$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$2\ln(\lvert x\rvert)$

2. *Donner une primitive F sur I de :*

   (a) $x \longmapsto 6e^x - \dfrac{2}{3\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.

   $F(x) = 6e^x - \dfrac{4\sqrt{x}}{3}$

   (b) $x \longmapsto \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

   $F(x) = -\dfrac{3}{2(x^2+1)}$

3. *Donner la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \sin(x)\cos^3(x)$ qui vaut 2 en $\frac{\pi}{4}$.*

   Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F(x) = -\dfrac{\cos^4(x)}{4} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Or

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \iff -\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{4} + c = 2 \iff -\frac{1}{16} + c = 2 \iff c = \frac{33}{16}$$

   La réponse est donc la fonction $x \longmapsto -\dfrac{\cos^4(x)}{4} + \dfrac{33}{16}$.

4. *Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2u+1}\,\mathrm{d}u$.*

   $I = \left[\dfrac{e^{2u+1}}{2}\right]_0^1 = \dfrac{e^3 - e}{2}$.

5. *Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3t+1}\,\mathrm{d}t$.*

   $J = \left[\dfrac{\ln(3t+1)}{3}\right]_0^1 = \dfrac{\ln(4)}{3} = \dfrac{2\ln(2)}{3}$.

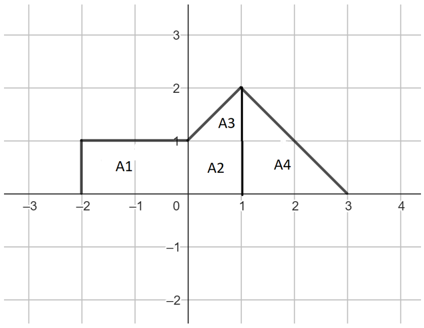
6. *Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.*

   $K = \left[\dfrac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2 : aire sous la courbe

On considère la fonction f définie sur $[-2, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-2, 0] \\ x + 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ -x + 3 & \text{si } x \in]1, 3] \end{cases}$

1. *Construire ci-dessous la courbe représentative de f sur $[-2,3]$.*



2. *La fonction f est-elle continue sur $[-2,3]$? f admet-elle une primitive sur $[-2,3]$? Justifier.*

   Il est clair que la fonction f est continue sur $[-2,3]$. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I. Donc f admet bien une primitive sur $[-2,3]$.

3. *Déterminer* ***graphiquement*** $\int_{-2}^{3} f(t)\,dt$*. Vous expliquerez en vous servant de votre dessin.*

   $\int_{-2}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = A1 + A2 + A3 + A4$ car f est positive sur $[-2,3]$. Ainsi, $\int_{-2}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times 1 + 1\times 1 + \dfrac{1\times 1}{2} + \dfrac{2\times 2}{2} = \dfrac{11}{2}$.

4. *Retrouver le résultat précédent par un calcul de l'intégrale que vous détaillerez.*

   On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} 1\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} (-x+3)\,\mathrm{d}x \\
&= [x]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 \\
&= 2 + \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{9}{2} + 9 + \tfrac{1}{2} - 3 = \tfrac{11}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : propriétés des intégrales

Les questions sont indépendantes.

1. *Calculer* $I = \int_{2}^{3} \sqrt{e^{t^2}+1}\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{2} \sqrt{e^{x^2}+1}\,\mathrm{d}x$

   $I = \int_{2}^{3} \sqrt{e^{t^2}+1}\,\mathrm{d}t - \int_{2}^{3} \sqrt{e^{x^2}+1}\,\mathrm{d}x = 0$

2. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int_{1}^{8} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(8), \quad \int_{1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(2e^3) \quad \text{et} \quad \int_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(\sqrt{2}) + 3$$

   Donner $I = \int_{3}^{8} f(t)\,\mathrm{d}t$ *en fonction de* $\ln(2)$.

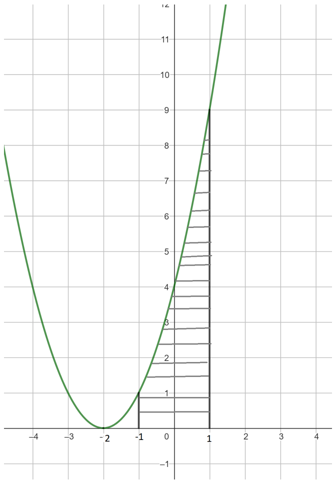
   $I = \int_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{8} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{8} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$ par Chasles.

   Ainsi, $I = \ln(\sqrt{2}) + 3 + \ln(8) - \ln(2e^3) = \frac{1}{2}\ln(2) + 3 + 3\ln(2) - \ln(2) - 3 = \frac{5\ln(2)}{2}$.

3. *Montrer que pour tout $t \in [2,4]$, $2t^2 - t^3 \leq 0$.* ***En déduire, sans calcul*** *que* $\int_{2}^{4} 2t^2\,dt \leq \int_{2}^{4} t^3\,dt$.

   Pour tout $t \in [2,4]$, $2t^2 - t^3 = t^2(2-t) \leq 0$. Ainsi, $\forall\, t \in [2,4]$, $2t^2 \leq t^3$. D'où le résultat.

4. *Soit $f : x \longmapsto (x+2)^2$ dont la courbe est représentée ci-dessous.*



   (a) *Déterminer l'aire de la surface hachurée.*

   Il faut calculer $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On a $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x+2)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

   (b) *Calculer la valeur moyenne de f sur $[-1,1]$.*

   $\mu = \dfrac{1}{1-(-1)} A = \dfrac{13}{3}$.

Exercice 4 : équations différentielles

1. *Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $4y' - \dfrac{2}{x}y = -\dfrac{1}{x}$.*

   • Étape 1 : résolution de (E_0) : $4y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ sur $]0,+\infty[$.

   On a $y_0(x) = ke^{-\int \frac{-\frac{2}{x}}{4}\,\mathrm{d}x} = ke^{\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x} = ke^{\frac{1}{2}\ln(x)} = k\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   • Étape 2 : solution particulière de (E). La fonction $y_p : x \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est une solution évidente.

   • Étape 3 : conclusion

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\sqrt{x} + \dfrac{1}{2} \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

2. *Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $(x+1)y' - y = (x+1)^2\sin(x)$.*

   • Étape 1 : résolution de (E_0) : $(x+1)y' - y = 0$ sur $]0,+\infty[$.

   On a $y_0(x) = ke^{-\int \frac{-1}{(x+1)}\,\mathrm{d}x} = ke^{\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x} = ke^{\ln(x+1)} = k(x+1)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   • Étape 2 : solution particulière de (E). On utilise la méthode de variation de la constante. On cherche y_p sous la forme $y_p(x) = k(x)(x+1)$.

   On a $y_p'(x) = k'(x)(x+1) + k(x)$. Ainsi

   y_p SP de $(E) \iff (x+1)y_p'(x) - y_p(x) = (x+1)^2\sin(x) \iff k'(x)(x+1)^2 + (x+1)k(x) - k(x)(x+1) = (x+1)^2\sin(x) \iff k'(x) = \sin(x)$.
   Choisissons par exemple $k(x) = -\cos(x)$. On obtient $y_p(x) = -\cos(x)(x+1)$

   • Étape 3 : conclusion

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k(x+1) - \cos(x)(x+1) \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(E): \ y'' - 2y' + y = xe^x$.

• Étape 1 : résolution de $(E_0) \ : y'' - 2y' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

L'équation caractéristique associée est (C) $r^2 - 2r + 1 = 0$ c'est-à-dire $(r-1)^2 = 0$. Ainsi, $y_0(x) = (k_1 x + k_2)e^x$, avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

• Étape 2 : solution particulière de (E). On la cherche sous la forme $y_p(x) = Q(x)e^x$. On a $y_p'(x) = (Q' + Q)\,e^x$ et $y_p''(x) = (Q'' + 2Q' + Q)\,e^x$. Ainsi,

y_p SP de $(E) \iff y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = xe^x \iff (Q'' + 2Q' + Q - 2Q' - 2Q + Q)\,e^x = xe^x \iff Q'' = x$
En primitivant, on peut prendre $Q' = \dfrac{x^2}{2}$ ainsi, $Q = \dfrac{x^3}{6}$. On en déduit : $y_p(x) = \dfrac{x^3}{6}e^x$.

• Étape 3 : conclusion

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 x + k_2)e^x + \dfrac{x^3}{6}e^x \end{array} ; (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$