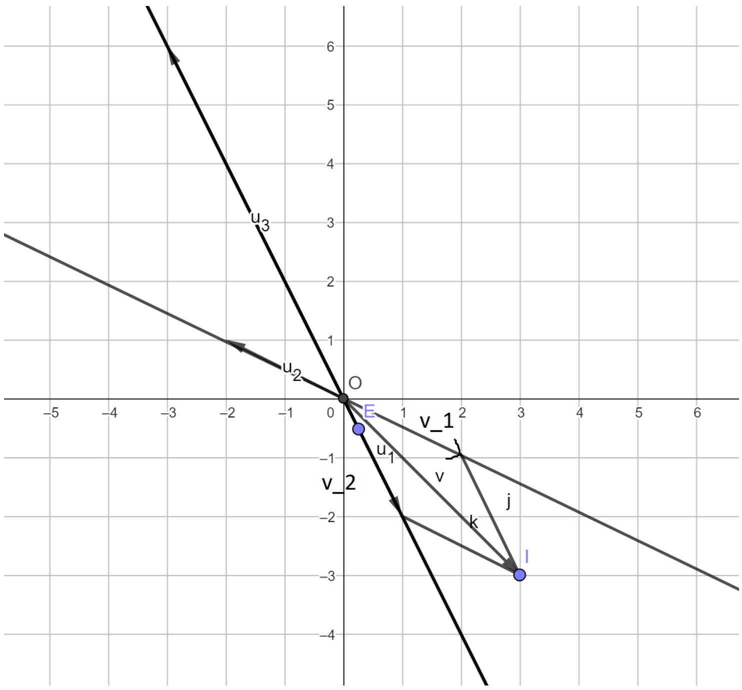
Correction S1 PA GEPNC

Exercice 1 : géométrie du plan

Soient $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *quatre vecteurs du plan dont les coordonnées dans le repère* $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath}\,)$ *sont :*
$\overrightarrow{u_1}=(1,-2)$, $\overrightarrow{u_2}=(-2,1)$, $\overrightarrow{u_3}=(-3,6)$ *et* $\overrightarrow{v}=(3-3)$.

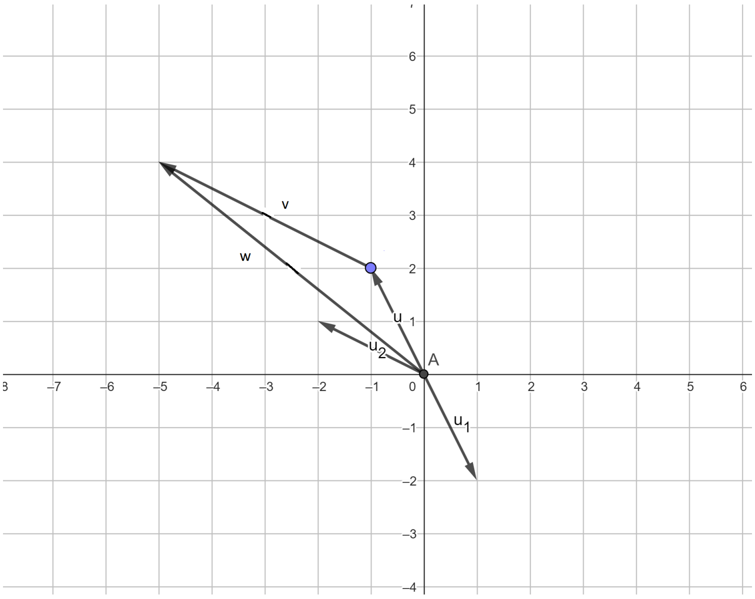


1. *Dessiner les vecteurs* $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sur le plan quadrillé ci-dessus.*
2. (a) $(O\,;\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2}\,)$ *est-il un repère du plan ? Justifier.*

   Oui car les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

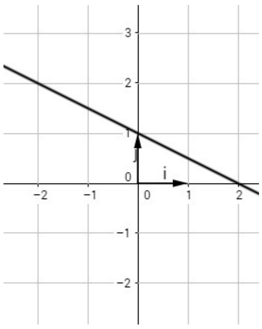
   (b) *Si oui, déterminer graphiquement deux réels a et b tels quel* $\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{u_1}+b\overrightarrow{u_2}$. *(Les marques de construction doivent apparaître clairement sur le plan.)*
   Dans ce cas, indiquer ci-dessous votre résultat :
   On trouve 1 et -1 : $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=-\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_1}$.

   (c) *Mêmes questions avec* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_3}$.
   $\overrightarrow{u_3}=-3\overrightarrow{u_1}$. Ces deux vecteurs sont donc colinéaires. Ils ne peuvent pas former un repère du plan.
3. *Construire le vecteur* $\overrightarrow{w}=-\overrightarrow{u_1}+2\overrightarrow{u_2}$. *(Les marques de construction doivent apparaître clairement sur le plan.)*
   Quelles sont ses coordonnées dans le repère $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath}\,)$ *?*

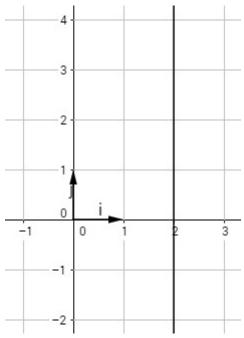


Graphiquement, on trouve $\vec{w} = (-5, 4)$.

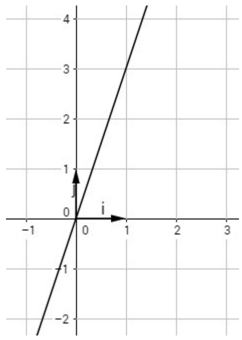
Exercice 2 : droites dans le plan



D1



D2



D3

1. *Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite D_1 et compléter sa définition en utilisant ces éléments.*

   $A_1(0, 1)$ et $\vec{u_1} = (2, -1)$ et $D_1 = \left\{ M \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{A_1M} = \alpha \vec{u_1} \right\}$

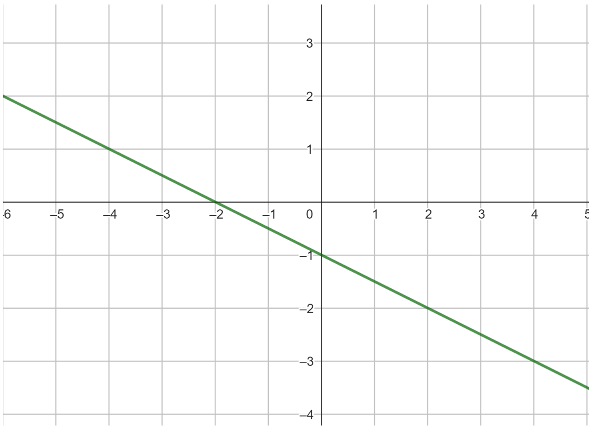
2. *Déterminer deux points de la droite D_2 et compléter sa définition en utilisant ces points.*

   $A_2(2, 0) \qquad B_2(2, 2) \qquad D_2 = \left\{ M \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{A_2M} = \alpha \overrightarrow{A_2B_2} \right\}$

3. *Déterminer une équation de la droite D_3 ainsi qu'un vecteur directeur.*

La droite passe par l'origine donc son équation est de la forme $y = ax$. Elle passe par $A(1, 3)$. D'où $3 = a \times 1$. L'équation est donc $y = 3x$. Un vecteur directeur est par exemple $\vec{u} = (1, 3)$.

4. *Dessiner la droite D_4 d'équation $x + 2y + 2 = 0$ dans le plan ci-dessous.*



5. *Déterminer un vecteur directeur de D_4. De laquelle des autres droites, D_4 est-elle parallèle ? Justifier par une propriété du cours.*

Un vecteur directeur de $D4$ est $\vec{u} = (-2, 1)$. Ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{u_1} = (2, -1)$. Les droites $D1$ et $D4$ sont donc parallèles.

Exercice 3 : nombres complexes 1

Soient $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 2i + 3$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 10 - 5i$ et $z_5 = 3 - 4i$

1. *Écrire les deux nombres complexes $Z_1 = iz_1 + \overline{z_2}z_3$ et $Z_2 = \dfrac{\overline{z_4}}{z_5}$ sous forme algébrique.*

On a
- $Z_1 = i(5 - 3i) + (-2i + 3)(1 + i) = 5i + 3 - 2i + 2 + 3 + 3i = 8 + 6i$.
- $Z_2 = \dfrac{10 + 5i}{3 - 4i} = \dfrac{(10 + 5i)(3 + 4i)}{3^2 + 4^2} = \dfrac{30 + 40i + 15i - 20}{25} = \dfrac{10 + 55i}{25} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}i$.

2. *Déterminer le module de z_4 et z_5. En déduire celui de Z_2.*

$|z_4| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ et $|z_5| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Ainsi, $|Z_2| = \dfrac{|\overline{z_4}|}{|z_5|} = \dfrac{|z_4|}{|z_5|} = \sqrt{5}$.

Exercice 4 : nombres complexes 2

1. *Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :*
$$z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = \frac{\sqrt{3} - i}{2 + 2i} \text{ et } z_4 = \left(\sqrt{3} - i\right)^5$$

- $|z_1| = 2$. Ainsi, $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
- De même $|z_2| = 2\sqrt{2}$. D'où, $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- On en déduit que $z_3 = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.
- $z_4 = (z_1)^5 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 32e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

2. *Déterminer un argument de $z = \dfrac{-3i}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$.*

On a $z = \dfrac{3e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. Un argument de z est donc $\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 5 : résolution d'équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

$\Delta = 9 - 4 \times 3 = -3$. Donc $S = \left\{\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$.