EPITA

Mathématiques

Examen S1B2-ARITH

durée : 1 heure

Janvier 2024

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 20 points.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 3 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : nombres premiers et pgcd (4 points)

On se donne trois entiers naturels : $a = 300$, $b = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$ et $c = 2 \times 5^2 \times 9 \times 11$.

1. Donner la décomposition de a en produit de facteurs premiers.

   ....
   ....

2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de b. Quelle est la forme générale de la décomposition de d en facteurs premiers ? En déduire, le nombre de diviseurs positifs distincts de b.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Trouver $b \wedge c$. Vous détaillerez votre calcul.

   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : congruence (7 points)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit n un entier naturel non nul **premier avec** 4, c'est-à-dire $n \wedge 4 = 1$.
   (a) Quels sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de n par 4 ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) En déduire que $n^2 - 1 \equiv 0[4]$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Quel est le reste de la division euclidienne de $N = 17^9 - 8^{2023}$ par 7 ? Justifier.

Exercice 3 : autour de Bézout et Gauss (9 points)

1. **Théorème de Bézout.** Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

   Les questions (b) et (c) sont indépendantes.

   (a) Énoncer rigoureusement les deux versions du théorème de Bézout (d'une part quand $a \wedge b$ est quelconque et, d'autre part quand $a \wedge b = 1$).

   (b) L'affirmation « Si a et b sont premiers entre eux alors $\exists\,(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 2$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

   (c) En utilisant obligatoirement l'algorithme d'Euclide, montrer que 39 et 47 sont premiers entre eux. Trouver alors $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $39u + 47v = 1$

2. **Lemme de Gauss.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$
   (a) Montrer que $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1 \Longrightarrow a \mid c$ (lemme de Gauss)

   (b) On considère l'équation $(E) :\ 5(x-1) = 7y$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. À l'aide de la question précédente, montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $x = 1 + 7k$ et $y = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. En utilisant soit le théorème de Bézout, soit le lemme de Gauss, montrer que si $a \mid c$, $b \mid c$ et $a \wedge b = 1$ alors $ab \mid c$.