

EPITA

Mathématiques

Partiel S1

durée : 3 heures

Janvier 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera divisée par 2 pour obtenir une note sur 20.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 8 exercices.**
 - **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
 - Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
 - Documents et calculatrices interdits.
 - Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
-

Exercice 1 : encore des intégrales (3 points)

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $I = \int_1^2 (x-1)\sqrt{x-1} dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2 : cours sur les polynômes (4 points)

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. Que savez-vous du degré de $A+B$ et de $A \times B$?

.....
.....

2. Un étudiant doit énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B . Il écrit sur sa copie :

$$\ll \exists (Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } 0 \leq R < B \gg$$

Son professeur lui compte faux. Rectifier correctement l'énoncé ci-dessus pour qu'il corresponde effectivement au théorème demandé (et avoir tous les points).

.....

3. Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 + X - 3$ par $B = X^2 - X + 1$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Montrer que $ab \equiv 0[47] \iff a \equiv 0[47] \text{ ou } b \equiv 0[47]$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(b) En déduire que $a^2 \equiv 1[47] \iff a \equiv 1[47] \text{ ou } a \equiv -1[47]$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(c) Trouver tous les $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$ tels que $a^2 \equiv 1[47]$.

.....
.....
.....
.....
.....

(d) Soient $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de a^{46k} par 47? Justifier.

.....
.....
.....
.....

Exercice 5 : suites 1 (4,5 points)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ne s'annulant pas. Rappeler la définition de : $u_n \sim v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$?

.....
.....
.....
.....
.....

2. Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim, = o(\cdot), = O(\cdot)$ en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

(a) $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = e^n - n$.

.....

(b) $u_n = n^2 - n + 1$ et $v_n = n^2 - 1$.

.....

3. Soit (u_n) une suite telle que $u_n = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Donner un équivalent simple de (u_n) en $+\infty$. Justifier.

.....

Exercice 6 : suites 2 (5,5 points)

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 6x - 8}{8}$ définie sur \mathbb{R} et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 cette suite est-elle constante ?

.....

