

# EPITA

## Mathématiques

Partiel S1

durée : 3 heures

Janvier 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

**NOTE :**

Le barème est sur 40 points. La note sera divisée par 2 pour obtenir une note sur 20.

---

**Consignes :**

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 8 exercices.**
  - **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
  - Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
  - Documents et calculatrices interdits.
  - Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
-



### Exercice 1 : encore des intégrales (3 points)

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer  $I = \int_1^2 (x-1)\sqrt{x-1} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer  $J = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Exercice 2 : cours sur les polynômes (4 points)

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients réels.

1. Que savez-vous du degré de  $A+B$  et de  $A \times B$  ?

.....

.....

2. Un étudiant doit énoncer le théorème de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ . Il écrit sur sa copie :

$$\ll \exists (Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } 0 \leq R < B \gg$$

Son professeur lui compte faux. Rectifier correctement l'énoncé ci-dessus pour qu'il corresponde effectivement au théorème demandé (et avoir tous les points).

.....

3. Effectuer la division euclidienne de  $A = 2X^4 + X - 3$  par  $B = X^2 - X + 1$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





3. Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

(a) Montrer que  $ab \equiv 0[47] \iff a \equiv 0[47] \text{ ou } b \equiv 0[47]$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) En déduire que  $a^2 \equiv 1[47] \iff a \equiv 1[47] \text{ ou } a \equiv -1[47]$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Trouver tous les  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  tels que  $a^2 \equiv 1[47]$ .

.....

.....

.....

.....

.....

(d) Soient  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Quel est le reste de la division euclidienne de  $a^{46k}$  par 47? Justifier.

.....

.....

.....

.....

### Exercice 5 : suites 1 (4,5 points)

1. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites ne s'annulant pas. Rappeler la définition de :  $u_n \sim v_n$ ,  $u_n = o(v_n)$  et  $u_n = O(v_n)$  en  $+\infty$ ?

.....

.....

.....

.....

.....

2. Comparer en  $+\infty$  les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  suivantes à l'aide des comparateurs de Landau  $\sim, = o(\cdot), = O(\cdot)$  en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

(a)  $u_n = n^2 + 1$  et  $v_n = e^n - n$ .

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

(b)  $u_n = n^2 - n + 1$  et  $v_n = n^2 - 1$ .

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

3. Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ . Donner un équivalent simple de  $(u_n)$  en  $+\infty$ . Justifier.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Exercice 6 : suites 2 (5,5 points)**

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 6x - 8}{8}$  définie sur  $\mathbb{R}$  et la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $u_0$  cette suite est-elle constante ?

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....





