

# Correction Partiel S1

## Exercice 1 : encore des intégrales

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer  $I = \int_1^2 (x-1)\sqrt{x-1} dx$

$$I = \int_1^2 (x-1)^{\frac{3}{2}} dx = \left[ \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_1^2 = \left[ \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{5} \times 1^{\frac{5}{2}} - 0 = \frac{2}{5}$$

2. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer  $J = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} dx$

$$J = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2+6}{x^3+6x+1} dx = \frac{1}{3} [\ln(x^3+6x+1)]_0^1 = \frac{1}{3} (\ln(8) - \ln(1)) = \frac{3\ln(2)}{3} = \ln(2)$$

## Exercice 2 : cours sur les polynômes

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients réels.

1. Que savez-vous du degré de  $A+B$  et de  $A \times B$  ?

On a  $\deg(A+B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$  et  $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

2. Un étudiant doit énoncer le théorème de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ . Il écrit sur sa copie :

$$\ll \exists (Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } 0 \leq R < B \gg$$

Son professeur lui compte faux. Rectifier correctement l'énoncé ci-dessus pour qu'il corresponde effectivement au théorème demandé (et avoir tous les points).

$$\exists! (Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

3. Effectuer la division euclidienne de  $A = 2X^4 + X - 3$  par  $B = X^2 - X + 1$ .

$$\begin{array}{r} 2X^4 \qquad \qquad \qquad +X - 3 \quad | \quad X^2 - X + 1 \\ - \quad 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 \qquad \qquad \qquad | \quad 2X^2 + 2X \\ \hline \qquad \qquad \qquad 2X^3 - 2X^2 + X - 3 \qquad \qquad \qquad \\ - \quad \quad \quad 2X^3 - 2X^2 + 2X \qquad \qquad \qquad \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -X - 3 \end{array}$$

4. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Que signifie que  $\alpha$  est une racine de  $A$  ? Donner un exemple d'un polynôme  $A$  de degré 3 qui admet 42 comme racine.

- $\alpha$  racine de  $A \iff A(\alpha) = 0$ .
- Exemple :  $A = (X - 42)(X^2 + X + 1)$  est une polynôme de degré 3 qui admet 42 comme racine.

## Exercice 3 : nombres complexes

Considérons l'équation (E)  $(z + \sqrt{3} - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Résoudre  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$ .

- $(z + \sqrt{3} - i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \iff z + \sqrt{3} - i = 0$  ou  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .
- $z + \sqrt{3} - i = 0 \iff z = -\sqrt{3} + i$ .
- Le discriminant de  $z^2 - 2z + 2 = 0$  est  $\Delta = -4$ . Ainsi,

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \iff z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \text{ ou } z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$$

En conclusion :  $S = \{-\sqrt{3} + i, 1 + i, 1 - i\}$

2. Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de  $(E)$ .

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad 1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1 - i = \overline{1 + i} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

## Exercice 4 : arithmétique

Les parties sont indépendantes. Les résultats de la question 1. peuvent être admis et utilisés par la suite.

1. Soient  $p$  un nombre premier et  $a \in \mathbb{Z}$ .

(a) Montrer que  $p \wedge a = 1$  ou  $p | a$ .

On sait que  $p \wedge a | p$  et comme  $p$  est premier, on en déduit que  $p \wedge a = 1$  ou  $p \wedge a = p$ . Dans le cas où  $p \wedge a = p$ , comme on sait aussi que  $p \wedge a | a$ , on obtient  $p | a$ .

(b) Montrer que  $p \wedge a = 1$  si et seulement si  $\exists b \in \mathbb{Z}$  tel que  $ab \equiv 1[p]$ .

Par le théorème de Bézout, on a

$$p \wedge a = 1 \iff \exists (b, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } ab + pv = 1 \iff \exists (b, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } ab = 1 - pv \iff \exists b \in \mathbb{Z} \text{ tel que } ab \equiv 1[p]$$

2. Considérons le nombre premier  $p = 47$ . On cherche à résoudre l'équation  $(E)$   $23x \equiv 1[47]$  d'inconnue  $x \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$ .

(a) Trouver dans  $\mathbb{Z}^2$  une solution particulière  $(x_0, y_0)$  à l'équation  $(E_1)$   $23x + 47y = 1$ .

On a  $47 = 23 \times 2 + 1$  ainsi  $23 \times (-2) + 47 \times 1 = 1$ . Le couple  $(x_0, y_0) = (-2, 1)$  convient.

(b) Résoudre  $(E_1)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .

• Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution de  $(E_1)$ . On a  $23x + 47y = 1$ . Or  $23x_0 + 47y_0 = 1$ , ainsi,  $(\star)$   $23(x - x_0) = 47(y_0 - y)$ . On en déduit que  $47 | 23(x - x_0)$ . Comme  $47 \wedge 23 = 1$ , on a alors par le lemme de Gauss :  $47 | x - x_0$ . Ce qui revient à dire qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - x_0 = 47k$ , c'est-à-dire  $x = x_0 + 47k = -2 + 47k$ .

En reportant dans  $(\star)$ , on a alors  $23 \times 47k = 47(y_0 - y)$ . D'où,  $23k = y_0 - y$ , ce qui donne  $y = y_0 - 23k = 1 - 23k$ .

• Réciproquement, supposons que  $x = -2 + 47k$  et  $y = 1 - 23k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On a alors

$$23x + 47y = 23(-2 + 47k) + 47(1 - 23k) = 23 \times (-2) + 47 \times 1 + 23 \times 47k - 47 \times 23k = 1$$

Ainsi,  $(x, y)$  est bien solution de  $(E_1)$ .

• En conclusion,  $S_1 = \{(-2 + 47k, 1 - 23k), k \in \mathbb{Z}\}$ .

(c) En déduire toutes les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de  $(E)$ . En déduire les solutions de  $(E)$  dans  $\llbracket 1, 46 \rrbracket$ .

$$23x \equiv 1[47] \iff \exists q \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 23x = 1 + 47q \iff \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 23x + 47y = 1$$

Par la question précédente,  $S = \{-2 + 47k, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Cela revient à dire que les solutions de  $(E)$  sont tous les entiers congrus à  $-2$  modulo 47. Il n'y a qu'un seul entier  $x \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  qui vérifie cela :  $x = 45$ .

3. Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

(a) Montrer que  $ab \equiv 0[47] \iff a \equiv 0[47] \text{ ou } b \equiv 0[47]$ .

• L'implication réciproque  $\boxed{\Leftarrow}$  est évidente.

• Faisons l'implication directe  $\boxed{\Rightarrow}$ . Supposons  $ab \equiv 0[47]$ . On a ainsi  $47 \mid ab$ . Comme 47 est premier, on sait par la question 1.(a) que

— Soit  $47 \mid a$  et dans ce cas là, cela donne  $a \equiv 0[47]$ .

— Soit  $47 \nmid a = 1$ . Comme  $47 \mid ab$ , on obtient par le lemme de Gauss,  $47 \mid b$ , c'est-à-dire  $b \equiv 0[47]$ .

(b) En déduire que  $a^2 \equiv 1[47] \iff a \equiv 1[47] \text{ ou } a \equiv -1[47]$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Supposons  $a \equiv 1[47]$  ou  $a \equiv -1[47]$ .

Si  $a \equiv 1[47]$  alors  $a^2 \equiv 1^2[47] \equiv 1[47]$ . Si  $a \equiv -1[47]$  alors  $a^2 \equiv (-1)^2[47] \equiv 1[47]$ .

$\boxed{\Rightarrow}$  Supposons que  $a^2 \equiv 1[47]$ . Ainsi,  $a^2 - 1 \equiv 0[47]$  ce qui donne  $(a-1)(a+1) \equiv 0[47]$ . On obtient par la question précédente :  $a-1 \equiv 0[47]$  ou  $a+1 \equiv 0[47]$ , ce qui implique  $a \equiv 1[47]$  ou  $a \equiv -1[47]$ .

(c) Trouver tous les  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  tels que  $a^2 \equiv 1[47]$ .

Par la question précédente, cela revient à trouver tous les  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  tels que  $a \equiv 1[47]$  ou  $a \equiv -1[47]$ .

Or  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  et  $a \equiv 1[47] \iff a = 1$ . De plus,  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  et  $a \equiv -1[47] \iff a = 46$ .

Il n'y a donc que deux solutions : 1 et 46.

(d) Soient  $a \in \llbracket 1, 46 \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Quel est le reste de la division euclidienne de  $a^{46k}$  par 47 ? Justifier.

On a  $a^{46k} = (a^{46})^k$ . Comme  $a < 47$ , 47 ne divise pas  $a$ . 47 étant premier, par le petit théorème de Fermat,  $a^{46} \equiv 1[47]$ . Ainsi,  $(a^{46})^k \equiv 1^k[47] \equiv 1[47]$ . Comme  $0 \leq 1 < 47$ , 1 est le reste de la division euclidienne de  $a^{46k}$  par 47.

## Exercice 5 : suites 1

1. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites ne s'annulant pas. Rappeler la définition de :  $u_n \sim v_n$ ,  $u_n = o(v_n)$  et  $u_n = O(v_n)$  en  $+\infty$  ?

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1, \quad u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \text{ et } u_n = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ bornée}$$

On pourrait aussi écrire :

—  $u_n \sim v_n$  si  $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

—  $u_n = o(v_n)$  si  $u_n = v_n \varepsilon_n$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

—  $u_n = O(v_n)$  si  $u_n = v_n b_n$  avec  $(b_n)$  bornée.

2. Comparer en  $+\infty$  les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  suivantes à l'aide des comparateurs de Landau  $\sim, = o(\cdot), = O(\cdot)$  en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

(a)  $u_n = n^2 + 1$  et  $v_n = e^n - n$ .

$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{e^n(1 - \frac{n}{e^n})}$ . Par croissance comparée,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ . Par

conséquent  $u_n = o(v_n)$ . Comme  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  converge, elle est donc bornée. D'où,  $u_n = O(v_n)$ .

(b)  $u_n = n^2 - n + 1$  et  $v_n = n^2 - 1$ .

$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 - \frac{1}{n^2})} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . Par conséquent  $u_n \sim v_n$ . Comme  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  converge, elle est donc bornée. D'où,  $u_n = O(v_n)$ .

3. Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ . Donner un équivalent simple de  $(u_n)$  en  $+\infty$ . Justifier.

On peut écrire  $u_n = \frac{-1}{2n} + \frac{1}{n} \varepsilon_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ . Ainsi,  $\frac{u_n}{\frac{-1}{2n}} = 1 - 2\varepsilon_n \rightarrow 1$ . Donc  $u_n \sim \frac{-1}{2n}$ .

## Exercice 6 : suites 2

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 6x - 8}{8}$  définie sur  $\mathbb{R}$  et la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $u_0$  cette suite est-elle constante ?

$$(u_n) \text{ constante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

$$\text{Or } u_{n+1} = u_n \iff \frac{u_n^2 + 6u_n - 8}{8} = u_n \iff u_n^2 + 6u_n - 8 = 8u_n \iff u_n^2 - 2u_n - 8 = 0 \iff (u_n - 4)(u_n + 2) = 0.$$

Ainsi, pour  $u_0 = 4$  ou  $u_0 = -2$ , la suite  $(u_n)$  est constante.

2. Faire le tableau (complet) des variations de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{2x + 6}{8}$  qui s'annule pour  $x = -3$ . On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$4$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{17}{8}$	$-2$	$4$	$+\infty$

3. Pour la suite de l'exercice, on prend  $u_0 \in ]-2, 4[$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]-2, 4[$ .

On fait une récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

•  $u_0 \in ]-2, 4[$ . La propriété est donc vraie au rang 0.

• Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors,  $-2 < u_n < 4$ . Par le tableau de variations,  $f$  est strictement croissante entre  $-2$  et  $4$ . D'où,  $f(-2) < f(u_n) < f(4)$  ce qui donne  $-2 < u_{n+1} < 4$ . La propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

• Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]-2, 4[$

4. Étudier la monotonie de  $(u_n)$ .

On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 6u_n - 8}{8} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 8}{8} = \frac{(u_n - 4)(u_n + 2)}{8}$$

Via 3.,  $u_n + 2 > 0$  et  $u_n - 4 < 0$  car  $-2 < u_n < 4$ . Par conséquent,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ . Ainsi,  $(u_n)$  est décroissante.

5. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par  $-2$  ainsi elle converge. Notons  $l \in \mathbb{R}$  sa limite.  $l$  vérifie  $l = f(l)$ .

Ainsi,  $l = -2$  ou  $l = 4$ . Or comme  $(u_n)$  est décroissante, on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 < 4$ . Pour  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $l \leq u_0 < 4$ . Donc  $l = -2$ .

## Exercice 7 : une démonstration

Soit  $(u_n)$  une suite.

1. Soit  $l \in \mathbb{R}$ . Rappeler la définition avec les quantificateurs de «  $(u_n)$  converge vers  $l$  ».

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

2. Rappeler la définition avec les quantificateurs de «  $(u_n)$  est bornée ».

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

3. Montrer que si  $(u_n)$  converge alors  $(u_n)$  est bornée.

Supposons que  $(u_n)$  converge et notons  $\ell \in \mathbb{R}$  sa limite. On sait donc que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Comme cela est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $\varepsilon = 1$  par exemple, il existe donc un rang  $N$  à partir duquel  $|u_n - \ell| < 1$ . Ainsi, pour tout entier  $n \geq N$ , on a

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$$

ce qui signifie que la suite  $(u_n)$  est bornée à partir du rang  $N$ .

Définissons alors le réel  $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|)$ . On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ . La suite  $(u_n)$  est donc bornée.

4. Expliquer pourquoi la réciproque est fausse.

La suite  $((-1)^n)$  est bornée par 1 mais diverge. La réciproque est donc fausse.

## Exercice 8 : exercice original

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On suppose que

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_{p+q} \leq \frac{p+q}{pq}$$

En considérant des suites extraites de  $(u_n)$ , étudier le comportement de  $(u_n)$  en  $+\infty$  (convergence ou divergence). Justifier avec soin.

• Comme l'inégalité précédente est vraie pour tout entier  $p$  et tout entier  $q$  non nuls, on peut prendre  $p = q = n$ . On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ , on en déduit par le théorème des Gendarmes, que la suite  $(u_{2n})$  est convergente vers 0.

• En prenant cette fois ci  $p = n$  et  $q = n + 1$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Or  $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{n(1 + \frac{1}{n})}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0$ . On en déduit par les Gendarmes que la suite  $(u_{2n+1})$  converge vers 0.

• Les deux suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent donc vers une même limite (zéro) donc la suite  $(u_n)$  converge vers 0.