EPITA

Mathématiques

Partiel S1

durée : 3 heures

janvier 2022

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 7 exercices.**

— Documents et calculatrices interdits.

— Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes. **Prendre en compte la taille des cadres-réponses avant de commencer votre rédaction !**

— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (4 points)

On considère l'équation (E) $203x - 84y = 14$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver une solution particulière de (E).

2. En utilisant le lemme de Gauss, trouver l'ensemble des solutions de (E).

[suite du cadre page suivante]

Exercice 2 (2,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = 15^{4n+2} - 5^{2n+11}$. Montrer, sans récurrence, que $11 \mid A_n$.

Exercice 3 (3 points)

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Énoncer avec soin le théorème de Bézout ainsi que son corollaire.

2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d \mid a \text{ et } d \mid b \iff d \mid a \wedge b$.

Exercice 4 (5,5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. Rappeler la définition de : « Les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes »

2. Montrer que les deux suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont adjacentes.

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 (6 points)

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{-x^2 - x - 4}{4}$. On définit alors la suite (u_n) par $\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & \in & \mathbb{R} \text{ donné} \end{array} \right.$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 cette suite est-elle constante ?

2. Faire le tableau (complet) des variations de f sur $]-\infty, 0]$.

3. Pour la suite de l'exercice, nous prendrons $u_0 = -2$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in]-4, -1[$.

4. Étudier la monotonie de (u_n).

5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

Exercice 6 (4,5 points)

1. Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$, $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$ en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.
   (a) $u_n = -2n^3 + n + 3$ et $v_n = 1 - n^2$.

(b) $u_n = e^{-n} - \ln(n) + n$ et $v_n = n + 1$.

2. On considère une suite (u_n) telle qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(a) Comment peut-on réécrire $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$?

(b) Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ en $+\infty$.

(c) Donner un équivalent en $+\infty$ de $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 7 (4,5 points)

N.B. : Les questions de cet exercice sont interdépendantes. Si vous n'avez pas répondu à certaines d'entre elles, n'hésitez pas à admettre leurs résultats et à les réutiliser, si besoin, dans des questions ultérieures.

La question 1.(a) est une question bonus que vous pouvez admettre mais le résultat sera utile ensuite.

1. Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.
   (a) **(Bonus)** Montrer que $(a \wedge b = 1,\ a \mid c \text{ et } b \mid c) \implies ab \mid c$.

   (b) Montrer que si $a \mid b$ ou $a \mid c$ alors $a \mid bc$

   (c) Considérons trois entiers consécutifs d, $d+1$ et $d+2$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ fixé. En discutant sur le reste de la division euclidienne de d par 3, montrer que 3 divise l'un d'entre eux c'est-à-dire :

$$3 \mid d \quad \text{ou} \quad 3 \mid d+1 \quad \text{ou} \quad 3 \mid d+2$$

2. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.
   (a) Expliquer pourquoi $2 \mid p-1$ et $2 \mid p+1$.

(b) En déduire que $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $p-1=2k$ et $p+1=2(k+1)$ puis que $8 \,|\, p^2-1$.

(c) Expliquer pourquoi p est premier avec 3. Puis, en considérant les entiers $p-1$, p et $p+1$, montrer que $3 \,|\, p^2-1$.

(d) En déduire que $24 \,|\, p^2-1$.