

EPITA

Mathématiques

Partiel S1

durée : 3 heures

janvier 2022

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une règle de trois.


Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 7 exercices.**
 - Documents et calculatrices interdits.
 - Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes. **Prendre en compte la taille des cadres-réponses avant de commencer votre rédaction !**
 - Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
-

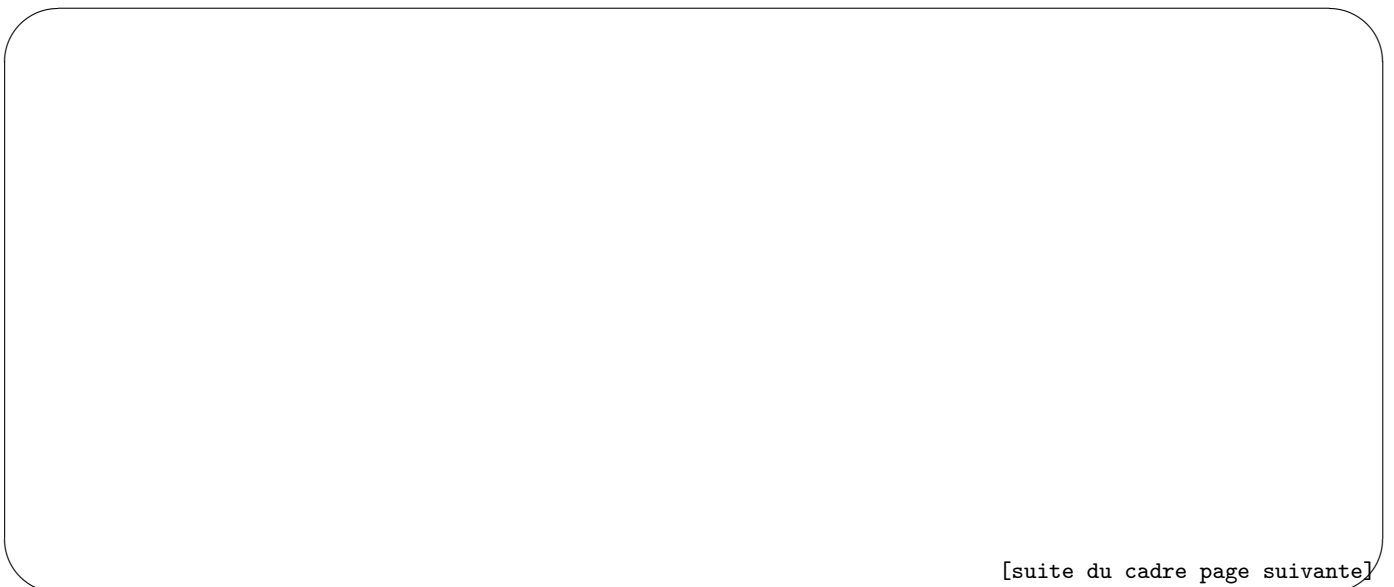
Exercice 1 (4 points)

On considère l'équation (E) $203x - 84y = 14$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver une solution particulière de (E) .



2. En utilisant le lemme de Gauss, trouver l'ensemble des solutions de (E) .



[suite du cadre page suivante]

Exercice 2 (2,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = 15^{4n+2} - 5^{2n+11}$. Montrer, sans récurrence, que $11 \mid A_n$.

Exercice 3 (3 points)

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Énoncer avec soin le théorème de Bézout ainsi que son corollaire.

2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d|a$ et $d|b \iff d|a \wedge b$.

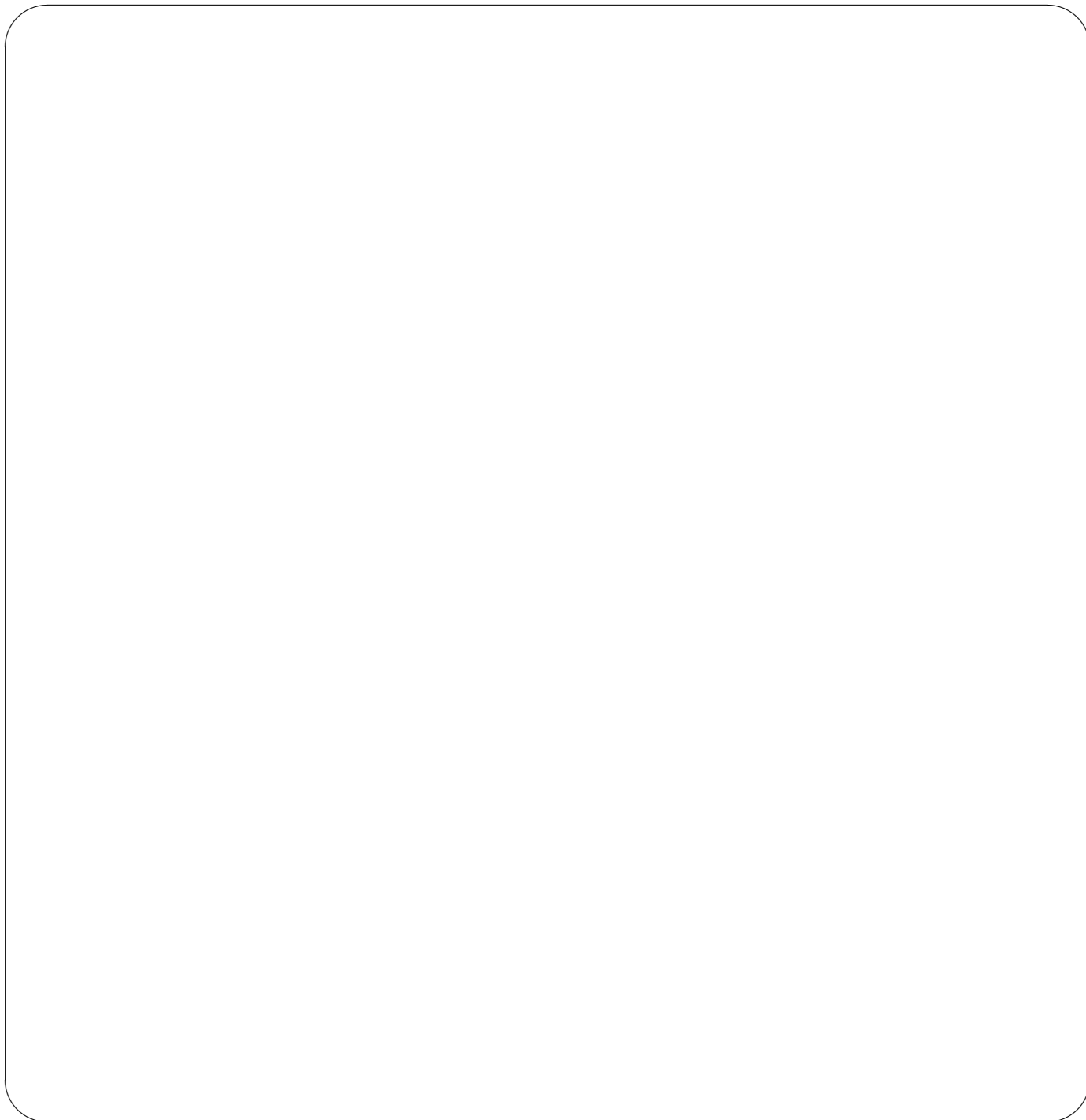
Exercice 4 (5,5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

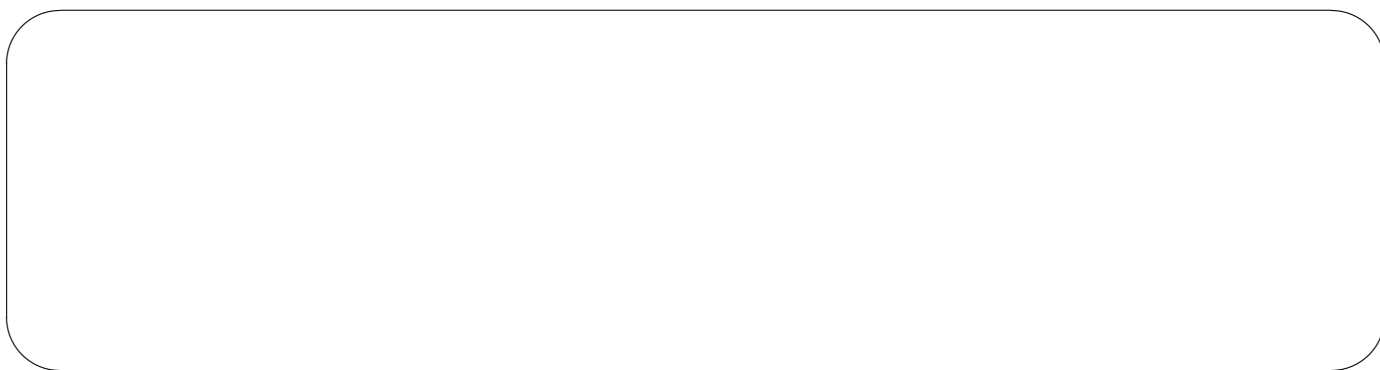
$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. Rappeler la définition de : « Les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes »

2. Montrer que les deux suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont adjacentes.



3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.



Exercice 5 (6 points)

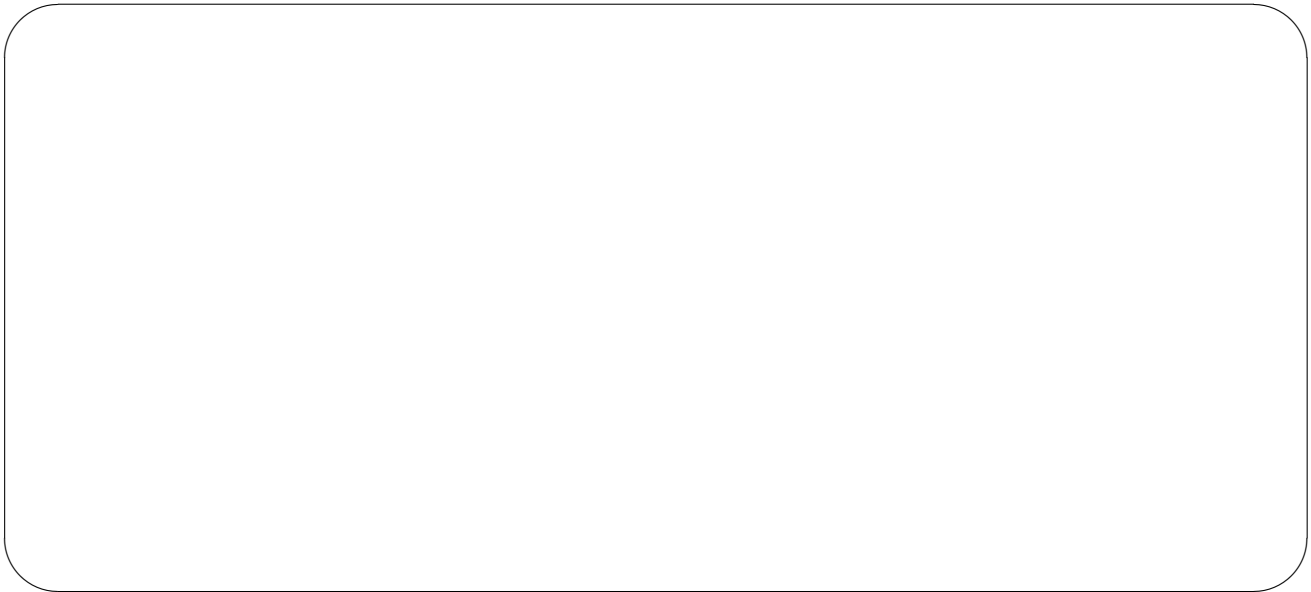
Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{-x^2 - x - 4}{4}$. On définit alors la suite (u_n) par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 cette suite est-elle constante?

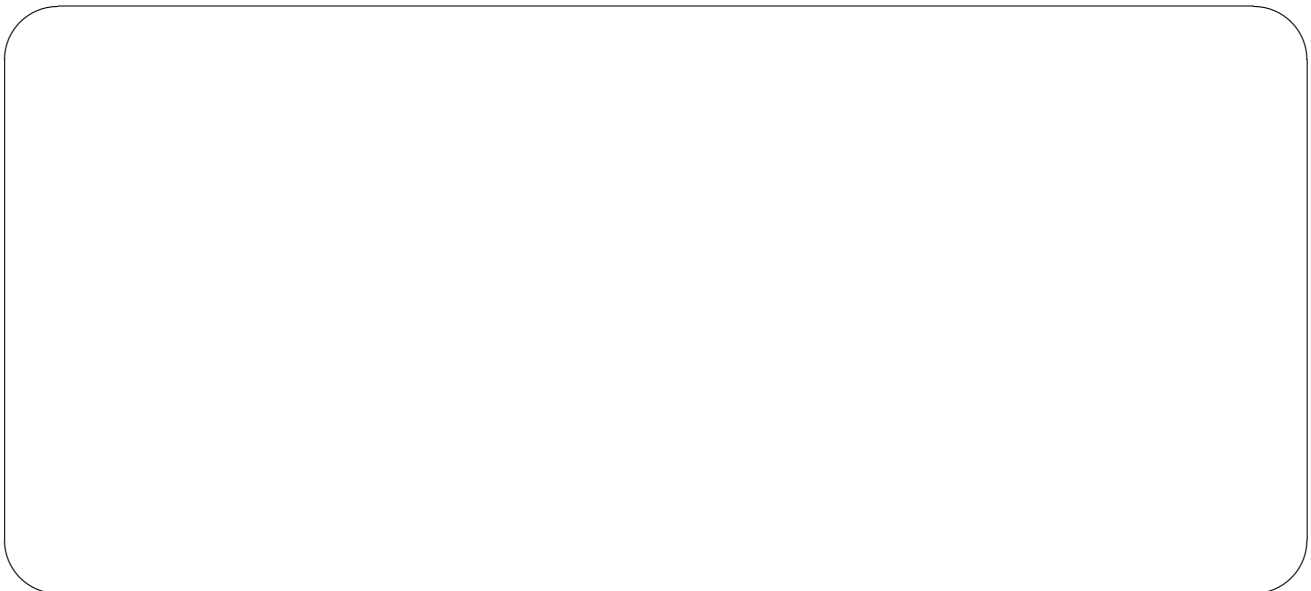
2. Faire le tableau (complet) des variations de f sur $] -\infty, 0]$.

3. Pour la suite de l'exercice, nous prendrons $u_0 = -2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in] -4, -1[$.

4. Étudier la monotonie de (u_n) .



5. La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, donner sa limite.



Exercice 6 (4,5 points)

1. Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau \sim , $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$ en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

(a) $u_n = -2n^3 + n + 3$ et $v_n = 1 - n^2$.



(b) $u_n = e^{-n} - \ln(n) + n$ et $v_n = n + 1$.

2. On considère une suite (u_n) telle qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(a) Comment peut-on réécrire $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

(b) Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$ en $+\infty$.

(c) Donner un équivalent en $+\infty$ de $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

Exercice 7 (4,5 points)

N.B. : Les questions de cet exercice sont interdépendantes. Si vous n'avez pas répondu à certaines d'entre elles, n'hésitez pas à admettre leurs résultats et à les réutiliser, si besoin, dans des questions ultérieures.

La question 1.(a) est une question bonus que vous pouvez admettre mais le résultat sera utile ensuite.

1. Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls.

(a) **(Bonus)** Montrer que $(a \wedge b = 1, a | c \text{ et } b | c) \implies ab | c$.

(b) Montrer que si $a | b$ ou $a | c$ alors $a | bc$

(c) Considérons trois entiers consécutifs d , $d + 1$ et $d + 2$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ fixé. En discutant sur le reste de la division euclidienne de d par 3, montrer que 3 divise l'un d'entre eux c'est-à-dire :

$$3 | d \text{ ou } 3 | d + 1 \text{ ou } 3 | d + 2$$

2. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

(a) Expliquer pourquoi $2 | p - 1$ et $2 | p + 1$.

(b) En déduire que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p - 1 = 2k$ et $p + 1 = 2(k + 1)$ puis que $8 \mid p^2 - 1$.

(c) Expliquer pourquoi p est premier avec 3. Puis, en considérant les entiers $p - 1$, p et $p + 1$, montrer que $3 \mid p^2 - 1$.

(d) En déduire que $24 \mid p^2 - 1$.