CORRECTION Partiel S1

Exercice 1

On considère l'équation (E) $203x - 84y = 14$ *d'inconnues* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. *À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver une solution particulière de* (E).

   Par l'algorithme,
$$\begin{array}{lcl} 203 & = & 84 \times 2 + 35 \quad (3) \\ 84 & = & 35 \times 2 + 14 \quad (2) \\ 35 & = & 14 \times 2 + 7 \quad (1) \\ 14 & = & 7 \times 2 + 0 \end{array}$$

   On en déduit que :

   $$203 \wedge 84 = 7 \overset{(1)}{=} 35 - 14 \times 2 \overset{(2)}{=} 35 - (84 - 35 \times 2) \times 2 = 35 \times 5 - 84 \times 2 \overset{(3)}{=} (203 - 84 \times 2) \times 5 - 84 \times 2 = 203 \times 5 - 84 \times 12$$

   Par conséquent, $14 = 7 \times 2 = 203 \times 10 - 84 \times 24$. Ainsi, $(10, 24)$ est une solution particulière de (E).

2. *En utilisant le lemme de Gauss, trouver l'ensemble des solutions de* (E).

   Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution quelconque de (E).

   On a $203x - 84y = 14$ or $14 = 203 \times 10 - 84 \times 24$. D'où, $203x - 84y = 203 \times 10 - 84 \times 24$. Ainsi, $203(x - 10) = 84(y - 24)$.
   En divisant par $203 \wedge 84 = 7$, on obtient $29(x - 10) \overset{(*)}{=} 12(y - 24)$. Ainsi, $12 \mid 29(x - 10)$. Or, $12 \wedge 29 = 1$, d'où, par Gauss, $12 \mid x - 10$ ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 10 = 12k$. Ainsi, $x = 10 + 12k$.
   En reportant dans $(*)$, on obtient $29 \times 12k = 12(y - 24)$, c'est-à-dire $29k = y - 24$. Ainsi, $y = 24 + 29k$.

   Réciproquement, supposons $x = 10 + 12k$ et $y = 24 + 29k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a
$$\begin{array}{rcl} 203x - 84y & = & 203(10 + 12k) - 84(24 + 29k) \\ & = & 203 \times 10 - 84 \times 24 + 203 \times 12k - 84 \times 29k \\ & = & 14 + 7 \times 29 \times 12k - 7 \times 12 \times 29k \\ & = & 14 + 0 = 14 \end{array}$$

   En conclusion
$$\mathcal{S} = \{(10 + 12k, 24 + 29k);\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer, sans récurrence, que* $11 \mid 15^{4n+2} - 5^{2n+11}$.

• $15 \equiv 4[11]$ d'où, $15^{4n+2} \equiv 4^{4n+2}[11]$. Or $4^2 = 16 \equiv 5[11]$. D'où $4^4 = \left(4^2\right)^2 \equiv 25[11] \equiv 3[11]$.
Par conséquent, $4^{4n+2} = (4^4)^n \times 4^2 \equiv 3^n \times 5[11]$. Ainsi, $15^{4n+2} \equiv 3^n \times 5[11]$.

• $5^2 = 25 \equiv 3[11]$. De plus, 11 est premier d'où, par Fermat, $5^{11} \equiv 5[11]$.
Ainsi, $5^{2n+11} = (5^2)^n \times 5^{11} \equiv 3^n \times 5[11]$.

• On en déduit que $4^{4n+2} - 5^{2n+11} \equiv 3^n \times 5 - 3^n \times 5[11] \equiv 0[11]$. Donc, $11 \mid 4^{4n+2} - 5^{2n+11}$.

Exercice 3

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. *Énoncer avec soin le théorème de Bézout ainsi que son corollaire.*

   • $a \wedge b = 1 \iff \exists\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2\ au + bv = 1$.

   • $\forall\,(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \exists\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2\ au + bv = a \wedge b$.

2. *Soit* $d \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $d \,|\, a \ \text{ et } \ d \,|\, b \iff d \,|\, a \wedge b$.

   • $\Longleftarrow$: Supposons $d \,|\, a \wedge b$. Comme $a \wedge b \,|\, a$, on a par transitivité $d \,|\, a$. De même, $d \,|\, b$.

   • $\Longrightarrow$: Supposons que $d \,|\, a$ et $d \,|\, b$. Alors, on sait que $\forall\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $d \,|\, au + bv$. Or, par Bézout, $\exists\,(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = au_0 + bv_0$. Ainsi, pour $(u, v) = (u_0, v_0)$, $d \,|\, a \wedge b$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. *Rappeler la définition de : « Les suites* (v_n) *et* (w_n) *sont adjacentes »*

   On dit que (v_n) et (w_n) sont adjacentes si (v_n) est croissante, (w_n) est décroissante (ou l'inverse) et si $v_n - w_n \longrightarrow 0$.

2. *Montrer que les deux suites extraites* $(v_n) = (u_{2n})$ *et* $(w_n) = (u_{2n+1})$ *sont adjacentes.*

   • $v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2} = -\dfrac{1}{(2n+1)^2} + \dfrac{1}{(2n+2)^2} = \dfrac{-4n-3}{(2n+1)^2(2n+2)^2}$.

   On en déduit que $v_{n+1} - v_n \leq 0$. Ainsi, (v_n) est décroissante.

   • $w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2} + \dfrac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^2} = \dfrac{1}{(2n+2)^2} - \dfrac{1}{(2n+3)^2} = \dfrac{4n+5}{(2n+2)^2(2n+3)^2}$.

   On en déduit que $w_{n+1} - w_n \geq 0$. Ainsi, (w_n) est croissante.

   • $v_n - w_n = u_{2n} - u_{2n+1} = -\dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

   • En conclusion, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

3. *La suite* (u_n) *est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.*

   Étant adjacentes, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Nous pouvons donc conclure que (u_n) converge (vers l).

Exercice 5

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{-x^2 - x - 4}{4}$. *On définit alors la suite* (u_n) *par* $\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & \in & \mathbb{R}\ \textit{donné} \end{array} \right.$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de* u_0 *cette suite est-elle constante ?*

   (u_n) constante $\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.
   Or $u_{n+1} = u_n \iff \dfrac{-u_n^2 - u_n - 4}{4} = u_n \iff u_n^2 + 5u_n + 4 \iff (u_n + 1)(u_n + 4) = 0$.

   Ainsi, pour $u_0 = -1$ ou $u_0 = -4$, la suite (u_n) est constante.

2. *Faire le tableau (complet) des variations de f sur $]-\infty, 0]$.*

   Pour $x \in \mathbb{R}^-$, $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{4}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{15}{16}$	$\searrow$	-1

3. *Pour la suite de l'exercice, nous prendrons $u_0 = -2$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-4, -1[$.*

   On fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   • $u_0 = -2 \in]-4, -1[$. La propriété est donc vraie au rang 0.

   • Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a alors, $-4 < u_n < -1$. Or par le tableau de variations, f est strictement croissante entre -4 et -1. D'où, $f(-4) < f(u_n) < f(-1)$ ce qui donne $-4 < u_{n+1} < -1$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

   • Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-4, -1[$

4. *Étudier la monotonie de (u_n).*

   On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n - 4}{4} - u_n = \frac{-u_n^2 - 5u_n - 4}{4} = -\frac{(u_n+1)(u_n+4)}{4}$$
   Via 3., $u_n + 1 < 0$ et $u_n + 4 > 0$ car $-4 < u_n < -1$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi, (u_n) est croissante.

5. *La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.*

   La suite (u_n) est croissante et majorée par -1 ainsi elle converge. Notons $l \in \mathbb{R}$ sa limite. l vérifie $l = f(l)$. Ainsi, $l = -4$ ou $l = -1$. Or comme (u_n) est croissante, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 = -2$. Pour $n \to +\infty$, on obtien $l \geq -2$. Donc $l = -1$.

Exercice 6

1. *Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$, $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$ en citant toutes les comparaison possibles et en justifiant vos réponses.*

   (a) $u_n = -2n^3 + n + 3$ *et* $v_n = 1 - n^2$.

   On a
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^3\left(-2 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)} = n \times \frac{-2 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 1}$$
   or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-2 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. On en déduit que $v_n = o(u_n)$.
   De plus comme la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ converge, elle est bornée. On a donc aussi, $v_n = O(u_n)$.

   (b) $u_n = e^{-n} - \ln(n) + n$ *et* $v_n = n + 1$

   On a
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n\left(\frac{e^{-n}}{n} - \frac{\ln(n)}{n} + 1\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{e^{-n}}{n} - \frac{\ln(n)}{n} + 1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{n} = 0$ et, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. D'où, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On en déduit que $u_n \sim v_n$. Comme la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée car convergente, on a aussi, $u_n = O(v_n)$.

2. *On considère une suite (u_n) telle qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$*

   (a) *Comment peut-on réécrire $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$?*

$$o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

   (b) *Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$ en $+\infty$.*

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$$

   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$. Donc, $u_n \sim \frac{1}{n}$.

   (c) *Donner un équivalent en $+\infty$ de $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.*

$$v_n = -\frac{1}{2n^2}\left(1 - 2\varepsilon_n\right)$$

   Donc, $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Exercice 7

N.B. : Les questions de cet exercice sont interdépendantes. Si vous n'avez pas répondu à certaines d'entre elles, n'hésitez pas à admettre leurs résultats et à les réutiliser, si besoin, dans des questions ultérieures.

La question 1.(a) est une question bonus que vous pouvez admettre mais le résultat sera utile ensuite.

1. *Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.*

   (a) **(Bonus)** *Montrer que $(a \wedge b = 1,\ a \mid c$ et $b \mid c) \implies ab \mid c$.*

   Supposons que $a \wedge b = 1,\ a \mid c$ et $b \mid c$. Ainsi,par Bézout,$\exists\,(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. D'où $c = auc + bvc$. Or $a \mid c$ et $b \mid c$ d'où, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $c = ak$. De même, il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $c = bk'$. On obtient donc

$$c = aubk' + bvak = ab\,(uk' + vk)$$

   Comme $uk' + vk \in \mathbb{Z}$, on a bien $ab \mid c$.

   (b) *Montrer que si $a \mid b$ ou $a \mid c$ alors $a \mid bc$*

   Si $a \mid b$ alors $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ak$. Ainsi, $bc = akc$ et $kc \in \mathbb{N}$. Donc, $a \mid bc$.
   De même, si $a \mid c$.

   (c) *Considérons trois entiers consécutifs d, $d+1$ et $d+2$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ fixé. En discutant sur le reste de la division euclidienne de d par 3, montrer que 3 divise l'un d'entre eux c'est-à-dire :*

$$3 \mid d \quad \textit{ou} \quad 3 \mid d+1 \quad \textit{ou} \quad 3 \mid d+2$$

   En faisant la division euclidienne de d par 3 on a

$$\exists\,!\,(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ d = 3q + r \text{ avec } 0 \leq r < 3$$

   Ainsi, $r = 0, 1$ ou 2.
   Si $r = 0$, on a $3 \mid d$.
   Si $r = 1$, alors $d = 3q + 1$ d'où $d + 2 = 3q + 3 = 3(q+1)$. Donc, $3 \mid d + 2$.
   Si $r = 2$, alors $d = 3q + 2$ d'où $d + 1 = 3q + 3 = 3(q+1)$. Donc, $3 \mid d + 1$.

2. *Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.*

   (a) *Expliquer pourquoi $2 \mid p-1$ et $2 \mid p+1$.*

   p est premier et supérieur à 5 donc p est impair. Ainsi, $p-1$ et $p+1$ sont pairs. D'où le résultat.

   (b) *En déduire que $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $p-1 = 2k$ et $p+1 = 2(k+1)$ puis que $8 \mid p^2 - 1$.*

   Comme $2 \mid p-1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p-1 = 2k$. Ainsi, $p+1 = p-1+2 = 2k+2 = 2(k+1)$. Par conséquent, $p^2 - 1 = 4k(k+1)$.
   Or comme k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair. Ainsi, $2 \mid k$ ou $2 \mid k+1$. Par, 1b) on a $2 \mid k(k+1)$ c'est-à-dire : $\exists\, k' \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2k'$. Du coup, $p^2 - 1 = 4 \times 2k' = 8k'$. Donc, $8 \mid p^2 - 1$.

   (c) *Expliquer pourquoi p est premier avec 3. Puis, en considérant les entiers $p-1$, p et $p+1$, montrer que $3 \mid p^2 - 1$.*

   - p étant premier et supérieur à 5, on a $3 \wedge p = 1$.

   - $p-1$, p et $p+1$ sont trois entiers consécutifs donc l'un d'entre eux est un multiple de 3. Cela signifie que par 1c)

   $$3 \mid p-1 \quad \text{ou} \quad 3 \mid p \quad \text{ou} \quad 3 \mid p+1$$

   Comme $3 \wedge p = 1$, on sait que 3 ne divise pas p. D'où, $3 \mid p-1$ ou $3 \mid p+1$. Par 1b), on a alors $3 \mid (p-1)(p+1)$ c'est-à-dire $3 \mid p^2 - 1$.

   (d) *En déduire que $24 \mid p^2 - 1$.*

   On a $8 \mid p^2 - 1$, $3 \mid p^2 - 1$ et $8 \wedge 3 = 1$. Par 1a), $24 \mid p^2 - 1$.