EPITA

Mathématiques

Partiel

Janvier 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (6 points)

A et B jouent avec un jeu de 32 cartes au jeu suivant :
A tire une main de 5 cartes au hasard dans le jeu, puis B tire une carte au hasard parmi les 5 cartes de la main de A.
B gagne s'il tire un valet. On appelle Ω l'univers des possibles.

Si les probabilités trouvées s'expriment avec des combinaisons ou des arrangements, il ne vous est pas demandé de les calculer.

a. Déterminer la probabilité que la main tirée par A contienne exactement 3 valets.

b. Déterminer la probabilité que la main tirée par A contienne exactement 3 valets et 3 piques.

c. Soit $k \in [\![0, 4]\!]$. On appelle V_k l'évènement : "La main tirée par A contient exactement k valet(s)".
Rappeler, sans la démontrer, ce que signifie l'affirmation : $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ forment une partition de Ω.

Dans les questions d. et e., seule la formule théorique est attendue et pas d'application numérique.

d. On appelle BV l'évènement : "B tire un valet". En utilisant la partition ci -dessus, écrire la formule des probabilités totales pour $P(BV)$.

e. À l'aide de la formule de Bayes, exprimer la probabilité qu'il y ait eu exactement 3 valets parmi les 5 cartes tirées par A, sachant que B tire un valet.

Exercice 2 (3 points)

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω.

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$.
   Déterminer son espérance, sa variance ainsi que $P(X = 3)$ sous forme de fraction simplifiée.

2. Y suit une loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$. Déterminer son espérance.

Exercice 3 (3 points)

En utilisant le petit théorème de Fermat dont vous rappellerez l'énoncé, déterminer le reste de la division euclidienne de 2021^{362} par 19.

Exercice 4 (5 points)

On appelle (E) l'équation : « $630x - 195y = 30$; $\quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ » .

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E).

2. En utilisant le lemme de Gauss, déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 5 (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X-1)(X-2)$ divise $P(X) = n\left((X-1)^{n+1} - X\right) + ((X-1)^n - X) + (n+1)$.

2. Montrer que -1 est racine de $Q(X) = (2n+1)X^{2n+3} + (2n+3)X^{2n+2} + (2n+3)\,(X+1) - 2$.
   Déterminer sa multiplicité exacte.

Exercice 6 (3 points)

On considère le polynôme $R(X) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - X - 6$.

1. Montrer que 1 et -2 sont racines de R.

2. En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser R en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 (4 points)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n + v_n}{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$

1. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$.
   Montrer que (w_n) est géométrique, déterminer w_n en fonction de n, déterminer son signe et sa limite en $+\infty$.

2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8 (3 points)

Comparer les couples suivants, à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$, $= o(.)$, $= O(.)$, en citant toutes les comparaisons possibles. Justifiez vos réponses.

1. $u_n = n^2 + 3n \quad$ et $\quad v_n = 2n^2 + 3$

2. $u_n = n^2 \quad$ et $\quad v_n = n\sin(n)$

3. $u_n = \ln(n) + e^n + n \quad$ et $\quad v_n = \ln(n^2) + e^n + 2$