Exercice 1 (6 points)

A et B jouent avec un jeu de 32 cartes au jeu suivant :
A tire une main de 5 cartes au hasard dans le jeu, puis B tire une carte au hasard parmi les 5 cartes de la main de A.
B gagne s'il tire un valet. On appelle Ω l'univers des possibles.
Si les probabilités trouvées s'expriment avec des combinaisons ou des arrangements, il ne vous est pas demandé de les calculer.

a. *Déterminer la probabilité que la main tirée par A contienne exactement 3 valets.*

Pour obtenir une main de 5 cartes, on choisit 5 cartes parmi les 32 du jeu.
Pour obtenir une main de 5 cartes contenant exactement 3 valets, on choisit 3 valets parmi les 4 valets du jeu et 2 cartes parmi le reste des cartes.
On est en situation d'équiprobabilité donc :

$$P(3V) = \frac{\mid 3V \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$$

b. *Déterminer la probabilité que la main tirée par A contienne exactement 3 valets et 3 piques.*

Pour tirer une main 5 cartes contenant exactement 3 valets et 3 piques, il faut obligatoirement choisir le valet de pique, puis choisir 2 valets parmi les 3 autres valets et 2 piques parmi les 7 autres piques. Donc :

$$P(3V3P) = \frac{\mid 3V3P \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{32}{5}}$$

c. *Soit $k \in [\![0,4]\!]$. On appelle V_k l'évènement : "La main tirée par A contient exactement k valet(s)".*
Rappeler, sans la démontrer, ce que signifie l'affirmation : $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ forment une partition de Ω.

$\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ forment une partition de $\Omega \iff$ Les V_i sont deux à deux disjoints et $V_0 \sqcup V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3 \sqcup V_4 = \Omega$

Dans les questions d. et e., seule la formule théorique est attendue et pas d'application numérique.

d. *On appelle BV l'évènement : "B tire un valet". En utilisant la partition ci -dessus, écrire la formule des probabilités totales pour $P(BV)$.*

$P(BV) = P(BV \mid V_0)P(V_0) + P(BV \mid V_1)P(V_1) + P(BV \mid V_2)P(V_2) + P(BV \mid V_3)P(V_3) + P(BV \mid V_4)P(V_4)$

e. *À l'aide de la formule de Bayes, exprimer la probabilité qu'il y ait eu exactement 3 valets parmi les 5 cartes tirées par A, sachant que B tire un valet.*

$$P(V_3 \mid BV) = \frac{P(BV \mid V_3)P(V_3)}{P(BV)}$$

Exercice 2 (3 points)

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω.

1. *X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.*
Déterminer son espérance, sa variance ainsi que $P(X = 3)$ sous forme de fraction simplifiée.

$E(X) = np = \frac{5}{2} \qquad V(X) = np(1-p) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$

$P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{10! \times 3^7}{7! \times 3! \times 4^{10}} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 3^7}{3 \times 2 \times 4^{10}} = \frac{3^8 \times 5}{2^{17}}$

2. *Y suit une loi uniforme sur $[\![1,10]\!]$. Déterminer son espérance.*

Y est une loi uniforme donc : $\forall n \in [\![1,10]\!],\ P(Y = n) = \frac{1}{10}$

$E(Y) = \sum_{n=1}^{10} nP(Y = n) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10} n = \frac{1}{10} \times \frac{10 \times 11}{2} = \frac{11}{2}$

Exercice 3 (3 points)

En utilisant le petit théorème de Fermat dont vous rappellerez l'énoncé, déterminer le reste de la division euclidienne de 2021^{362} *par* 19.

$2021 = 106 \times 19 + 7$ Donc $2021 \equiv 7\,[19]$ et $19 \nmid 2021$.

Or d'après le petit théorème de Fermat : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, p premier et $n \nmid p \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Ainsi $2021^{18} \equiv 1\,[19]$
On a donc $2021^{362} = 2021^{18\times 20} \times 2021^2 \equiv 7^2\,[19] \equiv 11\,[19]$
Ainsi $\exists k \in \mathbb{N}$, $2021^{362} = k \times 19 + 11$ et $0 \leq 11 < 19$
Donc le reste de la division euclidienne 2021^{362} par 19 est 11.

Exercice 4 (5 points)

On appelle (E) l'équation : « $630x - 195y = 30$; $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ » .

1. *A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E).*

On voit facilement que (E) est simplifiable par 5 et par 3, donc par 15. En faisant la division, on obtient :
(E) $\Longleftrightarrow 42x - 13y = 2$
$42 = 3 \times 13 + 3$ $\quad 1 = 13 - 4 \times (42 - 3 \times 13) = 13 \times 13 - 4 \times 42$
$13 = 4 \times 3 + 1$ $\quad 1 = 13 - 4 \times 3$
$3 = 3 \times 1 + 0$

Donc : $42 \wedge 13 = 1$ et
$13 \times 13 - 4 \times 42 = 1 \Longleftrightarrow 42 \times (-8) - 13 \times (-26) = 2$
$(-8, -26)$ est une solution particulière de (E).

2. *En utilisant le lemme de Gauss, déterminer l'ensemble des solutions de (E).*

$42 \times (-8) - 13 \times (-26) = 2$
Donc $42x - 13y = 2 = 42 \times (-8) - 13 \times (-26)$
(E) $\Longleftrightarrow 42(x+8) = 13(y+26)$

Or d'après le lemme de Gauss : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc \Longrightarrow a \mid c$

Ici $42 \wedge 13 = 1$ et $42 \mid 13(y+26) \Longrightarrow 42 \mid (y+26) \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $y + 26 = 42k$
En remplaçant dans (E), on obtient : $42(x+8) = 13 \times 42k \Longrightarrow (x+8) = 13k$
Ainsi (x,y) solution de (E) $\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -8 + 13k \\ y = -26 + 42k \end{cases}$
On vérifie l'autre implication.
Soit $(x,y) = (-8 + 13k, -26 + 42k); k \in \mathbb{Z}$
$42x - 13y = 42(-8 + 13k) - 13(-26 + 42k) = 42(-8) - 13(-26) = 2$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(-8 + 13k, -26 + 42k); k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 5 (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* $(X-1)(X-2)$ *divise* $P(X) = n\left((X-1)^{n+1} - X\right) + ((X-1)^n - X) + (n+1)$.

   $P(1) = n(0-1) + (0-1) + n + 1 = 0$ et $P(2) = n(1-2) + (1-2) + (n+1) = 0$
   D'après le théorème : $P(1) = 0$ et $P(2) = 0 \Longrightarrow (X-1)(X-2) \mid P$

2. *Montrer que -1 est racine de $Q(X) = (2n+1)X^{2n+3} + (2n+3)X^{2n+2} + (2n+3)(X+1) - 2$.*
Déterminer sa multiplicité exacte.
$Q(-1) = -(2n+1) + (2n+3) + 0 - 2 = 0$
$Q'(X) = (2n+1)(2n+3)X^{2n+2} + (2n+3)(2n+2)X^{2n+1} + (2n+3) = (2n+3)\left((2n+1)X^{2n+2} + (2n+2)X^{2n+1} + 1\right)$
$Q'(-1) = (2n+3)\left((2n+1) - (2n+2) + 1\right) = 0$
$Q''(X) = (2n+3)\left((2n+1)(2n+2)X^{2n+1} + (2n+2)(2n+1)X^{2n}\right)$
$Q''(-1) = (2n+3)\left((2n+1)(2n+2) - (2n+2)(2n+1)\right) = 0$
$Q^{(3)}(X) = (2n+3)(2n+1)(2n+2)\left((2n+1)X^{2n} + (2n)X^{2n-1}\right)$
$Q^{(3)}(-1) = (2n+3)(2n+1)(2n+2) \neq 0$
Ainsi $Q(-1) = Q'(-1) = Q''(-1) = 0$ et $Q^{(3)} \neq 0$
Donc -1 est racine de $Q(X)$ de multiplicité exactement 3.

Exercice 6 (3 points)

On considère le polynôme $R(X) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - X - 6$.

1. *Montrer que 1 et -2 sont racines de R.*
$R(1) = 1 + 3 + 3 - 1 - 6 = 0$
$R(-2) = 16 - 24 + 12 + 2 - 6 = 0$
Donc $(X-1)(X+2) \mid R$

2. *En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser R en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*
On effectue la division euclidienne de R par $(X-1)(X+2) = X^2 + X - 2$ et on obtient :
$R(X) = (X-1)(X+2)(X^2 + 2X + 3)$
Pour savoir si $X^2 + 2X + 3$ peut être factorisé, on calcule le discriminant : $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$
$X^2 + 2X + 3$ n'a pas de racine réelle donc il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
La décomposition de R en produit de polynômes irréductibles est : $R(X) = (X-1)(X+2)(X^2 + 2X + 3)$

Exercice 7 (4 points)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n + v_n}{5} \end{cases}$ *et* $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$

1. *Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$.*
Montrer que (w_n) est géométrique, déterminer w_n en fonction de n, déterminer son signe et sa limite en $+\infty$.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{4u_n + v_n}{5} - \frac{u_n + 4v_n}{5} = \frac{3u_n - 3v_n}{5} = \frac{3}{5}w_n$$

(w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ avec $w_0 = u_0 - v_0 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n > 0$
$0 < \dfrac{3}{5} < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} w_n = 0$

2. *Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n + v_n}{5} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{5} = -\dfrac{w_n}{5} < 0 \quad (u_n)$ est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{5} = \dfrac{w_n}{5} > 0 \quad (v_n)$ est croissante.

$\lim\limits_{+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{+\infty} w_n = 0$

Ainsi (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8 (3 points)

Comparer les couples suivants, à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$, $= o(.)$, $= O(.)$, en citant toutes les comparaisons possibles. Justifiez vos réponses.

1. $u_n = n^2 + 3n$ et $v_n = 2n^2 + 3$

   $$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{+\infty} \frac{n^2 + 3n}{2n^2 + 3} = \lim_{+\infty} \frac{n^2(1 + \frac{3}{n})}{n^2(2 + \frac{3}{n^1})} = \frac{1}{2}$$

   Toute suite convergente est bornée. Donc $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

   $u_n = O(v_n)$

2. $u_n = n^2$ et $v_n = n\sin(n)$

   $$\lim_{+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{+\infty} \frac{n\sin(n)}{n^2} = \lim_{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

   Donc $v_n = o(u_n)$ et comme toute suite convergente est bornée $v_n = O(u_n)$

3. $u_n = \ln(n) + e^n + n$ et $v_n = \ln(n^2) + e^n + 2$

   $$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(n) + e^n + n}{\ln(n^2) + e^n + 2} = \lim_{+\infty} \frac{e^n\left(1 + \frac{\ln(n)}{e^n} + \frac{n}{e^n}\right)}{e^n(1 + \frac{2\ln(n)}{e^n} + \frac{2}{e^n})} = 1$$

   Donc $u_n \sim v_n$ et comme toute suite convergente est bornée $u_n = O(v_n)$