EPITA

Mathématiques

Partiel (S1)

Janvier 2020

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Exercice 1 (2 points)

Soit (u_n) une suite réelle. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. (u_n) n'est pas bornée.

2. (u_n) est monotone.

Exercice 2 (3 points)

Soit (u_n) une suite réelle telle que : (u_{2n}) converge vers un réel l et (u_{3n}) converge vers un réel l'.

1. A l'aide d'une suite extraite bien choisie, montrer que $l = l'$.

2. Peut-on conclure sur la convergence de (u_n) ? (Justifier votre réponse.)

Exercice 3 (2 points)

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 10u_n + 27$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 une telle suite est-elle constante ?

2. On note ℓ la valeur trouvée à la question précédente. Montrer que la suite $(v_n) = (u_n - \ell)$ est géométrique et préciser sa raison.

3. On prend $u_0 = 1$. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4 (2 points)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \dfrac{1}{n!} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 5 (4,5 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}\cdot$

1. Trouver les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est constante.

2. Montrer que les intervalles $I_1 = [0, 2[$, $I_2 =]2, 4[$ et $I_3 =]4, +\infty[$ sont stables par f, c'est à dire $f(I) \subset I$.
   En déduire que si u_0 appartient à un de ces intervalles, tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.

3. On suppose que $u_0 \in I_2$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). En déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 6 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $329x - 217y = 21$.

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $329x - 217y = 21$.

Exercice 7 (2 points)

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres : $A = 12825$ et $B = 9240$.

2. Sans utiliser l'algorithme d'Euclide, en déduire leur pgcd.

Exercice 8 (1,5 points)

Déterminer le reste de la division euclidienne de 751^{157} par 11.