Corrigé du Partiel

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (2 points)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) bornée : $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$
   (u_n) n'est pas bornée : $\forall M, m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m$ ou $u_n > M$

2. (u_n) est monotone : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$

Exercice 2 (3 points)

Soit (u_n) une suite réelle telle que : (u_{2n}) converge vers un réel l et (u_{3n}) converge vers un réel l'.

1. (u_{6n})=$(u_{2(3n)})$ est une suite extraite de (u_{2n}) donc (u_{6n}) converge vers l.
   (u_{6n})=$(u_{3(2n)})$ est une suite extraite de (u_{3n}) donc (u_{6n}) converge vers l'.
   On en conclut que $l = l'$

2. Au delà de n'importe quel rang, on peut trouver des termes de (u_n) qui n'appartiennent ni à (u_{2n}) ni à (u_{3n}) (en particulier les termes de la suite (u_{6n+1})) donc on ne peut pas conclure sur la convergence de (u_n).

Exercice 3 (2 points)

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 10u_n + 27$.

1. $u_0 = 10u_0 + 27 \Leftrightarrow u_0 = -3$. La suite est constante si $u_0 = -3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 10u_n + 27 + 3 = 10(u_n + 3) = 10v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 10.
3. $u_0 = 1 \Longrightarrow v_0 = 1 + 3 = 4$ donc $v_n = 4.10^n$ et $u_n = v_n - 3 = 4.10^n - 3$

Exercice 4 (2 points)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \dfrac{1}{n!} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est croissante.
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2-(n+1)}{(n+1)!} \leqslant 0$ car $n \geqslant 1$ donc (v_n) est décroissante.
$v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
(u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 5 (4,5 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}\cdot$

1. u_n est constante ssi $u_0 = \dfrac{{u_0}^2+8}{6} \Longleftrightarrow {u_0}^2 - 6u_0 + 8 = 0 \Longleftrightarrow (u_0-2)(u_0-4) = 0 \Longleftrightarrow u_0 = 2$ ou $u_0 = 4$.

2. On établit le tableau de variation de f.

x	0		2		4		$+\infty$
f'	0	$+$		$+$		$+$	
f	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

On voit que $f(I_1) = \left[\frac{4}{3}, 2\right[\subset I_1$, $f(I_2) =]2,4[= I_2$ et $f(I_3) =]4,+\infty[= I_3$ donc I_1, I_2 et I_3 sont stables par f.
Si u_0 appartient à un de ces intervalles I.
Alors, $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \Longrightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in I$ donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

3. $u_0 \in I_2$ donc, d'après 2., $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I_2$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{{u_n}^2 - 6u_n + 8}{6} < 0$ car u_n est compris entre les deux racines du polynôme.

(u_n) est bornée et décroissante donc convergente.

Soit l sa limite. On sait que $f(l) = l$ donc $l = 2$ ou $l = 4$.
Comme (u_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_n \leqslant u_0 < 4 \Longrightarrow 2 \leqslant l \leqslant u_0 < 4$ donc $l = 2$.

Exercice 6 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $(E) : 329x - 217y = 21$.

q	r	u	v
	329	1	0
	217	0	1
1	112	1	-1
1	105	-1	2
1	7	2	-3
15	0		

Donc $329 \wedge 217 = 7$ et $(E_p) : 329 \times 2 - 217 \times 3 = 7$.

En divisant tout par 7, on obtient : $(E) \Longleftrightarrow 47x - 31y = 3$ avec $47 \wedge 31 = 1$
$(E_p) \Longleftrightarrow 47 \times 2 - 31 \times 3 = 1 \Longleftrightarrow 47 \times 6 - 31 \times 9 = 3$
Une solution particulière de (E) est $(6, 9)$.

2. En soustrayant (E_p) à (E) on a : $(E) \Longleftrightarrow 47(x - 6) = 31(y - 9)$
Donc : $47 \mid 31(y - 9)$ et $47 \wedge 31 = 1 \Longrightarrow$ (d'après le théorème de Gauss) $47 \mid (y - 9) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y - 9 = 47k$
En remplaçant dans (E) on obtient : $47(x - 6) = 31 \times 47k \Longrightarrow x - 6 = 31k$.
On vérifie que toutes les paires d'entiers du type $(6 + 31k, 9 + 47k), k \in \mathbb{Z}$ sont solution de (E) :
$47(6 + 31k) - 31(9 + 47k) = 47 \times 6 - 31 \times 9 = 3$
$S = \{(6 + 31k, 9 + 47k), k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 7 (2 points)

En utilisant les critères de divisibilité, on obtient :
$A = 12825 = 19 \times 5^2 \times 3^3$
$B = 9240 = 11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2^3$.
On en déduit que le pgcd de A et B est : 15.

Exercice 8 (1,5 points)

Déterminer le reste de la division euclidienne de 751^{157} par 11.

Grâce aux critères de divisibilité ou grâce à une division euclidienne, on obtient : $751 \equiv 3[11]$.
Comme 11 est premier, d'après le petit théorème de Fermat : $751^{(11-1)} \equiv 1[11]$ soit $751^{10} \equiv 1[11]$.
Ainsi $751^{157} = 751^{150} \times 751^7 \equiv 1 \times 3^7[11]$.
Or $3^5 \equiv 1[11]$ donc $751^{157} \equiv 3^5 \times 3^2[11] \equiv 9[11]$.
Comme $0 \leqslant 9 < 11$, on conclut que le reste de la division de 751^{157} par 11 est 9.