Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (2 points)

Écrire la négation des phrases suivantes :

1. « La racine carrée d'un entier pair est paire ».
2. « Dans n'importe quel triangle du plan, la somme des angles vaut 180° en géométrie euclidienne ».
3. « Certains étudiants n'auront pas vécu l'expérience internationale dès le S4 ».
4. « Certains étudiants auront vécu l'expérience internationale dès le S4 ».

Exercice 2 (2 points)

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $n! > 2^n$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3 (2 points)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Écrire en langage mathématique (avec les quantificateurs) les phrases suivantes :

1. « la fonction f s'annule au moins une fois ».
2. « f n'est pas la fonction nulle ».
3. « f est la fonction nulle ».
4. « f présente un minimum sur $\mathbb{R}$ ».

Exercice 4 (2 points)

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$.

1. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $f \circ g$ est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $f \circ g$ est surjective.

3. Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

4. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.

Exercice 5 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $732x + 124y = 4$.

[suite du cadre page suivante]

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $732x+124y = 4$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 6 (3 points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : $(a+b)$ et ab premiers entre eux $\iff$ a et b premiers entre eux.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 7 (2 points)

Quel est le reste de la division euclidienne de 12^{1527} par 5 ?

Exercice 8 (2 points)

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

Exercice 9 (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $X^2 + 2X$ divise $(X+1)^{2n} - 1$.

2. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

3. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.