

# Partiel 1

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_ Classe : \_\_\_\_\_

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

## Consignes :

- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

## Exercice 1 (2 points)

Écrire la négation des phrases suivantes :

1. « La racine carrée d'un entier pair est paire ».

2. « Dans n'importe quel triangle du plan, la somme des angles vaut  $180^\circ$  en géométrie euclidienne ».

3. « Certains étudiants n'auront pas vécu l'expérience internationale dès le S4 ».

4. « Certains étudiants auront vécu l'expérience internationale dès le S4 ».

## Exercice 2 (2 points)

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 4$ ,  $n! > 2^n$ .

[suite du cadre page suivante]

### Exercice 3 (2 points)

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Écrire en langage mathématique (avec les quantificateurs) les phrases suivantes :

1. « la fonction  $f$  s'annule au moins une fois ».

2. «  $f$  n'est pas la fonction nulle ».

3. «  $f$  est la fonction nulle ».

4. «  $f$  présente un minimum sur  $\mathbb{R}$  ».

### Exercice 4 (2 points)

Soient  $E$  un ensemble,  $f : E \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow E$ .

1. On suppose que  $f$  et  $g$  sont injectives. Montrer que  $f \circ g$  est injective.

2. On suppose que  $f$  et  $g$  sont surjectives. Montrer que  $f \circ g$  est surjective.

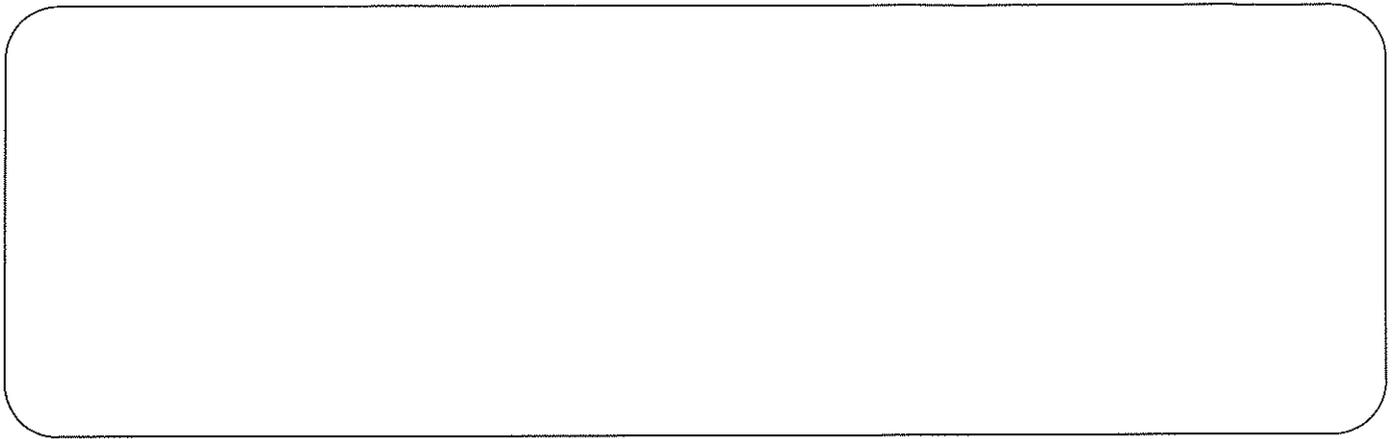
3. Montrer que  $g \circ f$  injective  $\implies f$  injective.

4. Montrer que  $g \circ f$  surjective  $\implies g$  surjective.

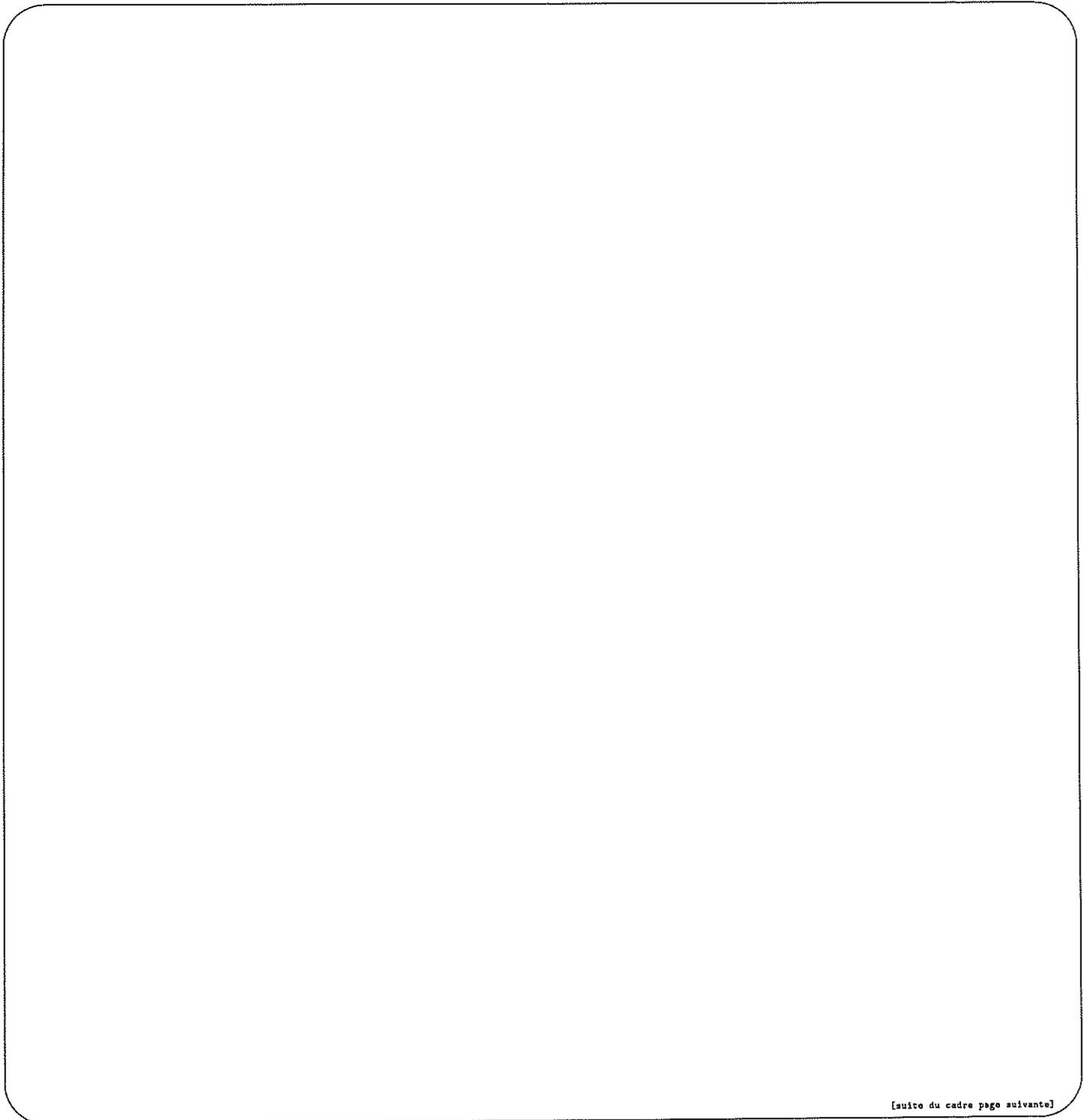
### Exercice 5 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation  $732x + 124y = 4$ .

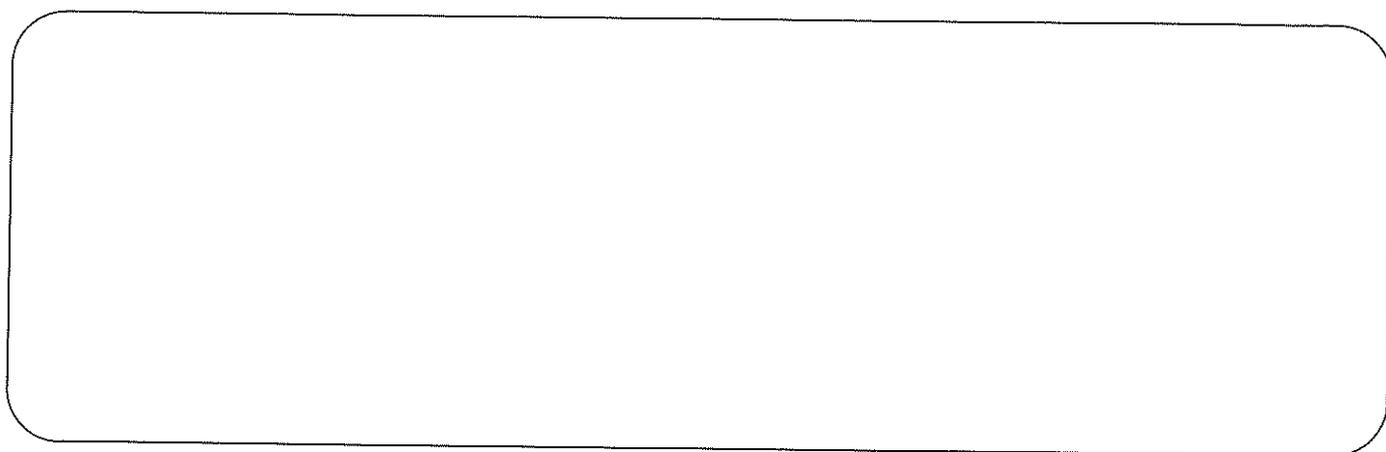
[suite du cadre page suivante]



2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $732x + 124y = 4$ .

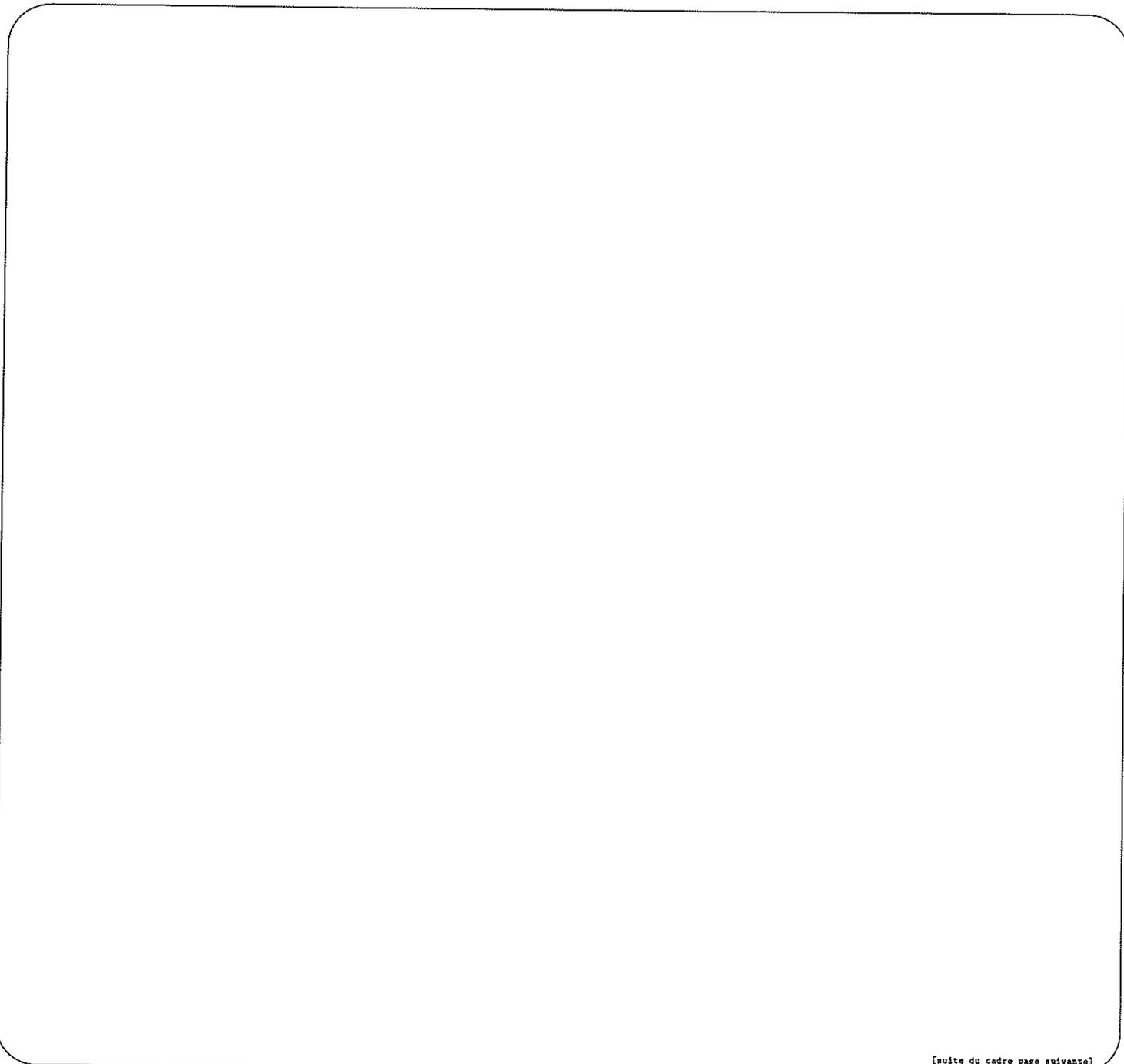


[suite du cadre page suivante]



**Exercice 6 (3 points)**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ . Montrer que :  $(a + b)$  et  $ab$  premiers entre eux  $\iff a$  et  $b$  premiers entre eux.



[suite du cadre page suivante]

**Exercice 7 (2 points)**

Quel est le reste de la division euclidienne de  $12^{1527}$  par 5 ?

**Exercice 8 (2 points)**

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme  $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ .

## Exercice 9 (3 points)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $X^2 + 2X$  divise  $(X + 1)^{2n} - 1$ .

2. Montrer que  $X^2$  divise  $(X + 1)^n - nX - 1$ .

3. Montrer que  $(X - 1)^2$  divise  $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ .