Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Consignes :

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (4 points)

Écrire la négation des phrases suivantes :

1. « Aucun diplômé de l'EPITA n'aura un premier salaire brut annuel en dessous de 40 k€ ».
2. « Si j'intègre le laboratoire de recherche de l'EPITA, je pourrai m'orienter vers l'imagerie médicale ».
3. « Certains MiMo sont compliqués ».
4. « Tous vos gestes sur IONISx sont analysés ».

Exercice 2 (2 points)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3 (2 points)

Écrire en langage mathématique (avec les quantificateurs) les phrases suivantes (ne pas se préoccuper de la validité des phrases, certaines peuvent être vraies et d'autres fausses) :

1. « Tout réel est le cube d'un réel ».

2. « Il existe un réel qui est le cube de tout réel ».

3. « Tout entier naturel est pair ou impair ».

4. « Entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un rationnel ».

Exercice 4 (2 points)

Dans chacune des questions suivantes, ENTOURER les bonnes réponses.

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors

   a. f est injective
   b. f n'est pas injective
   c. f est surjective
   d. f n'est pas surjective

2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors

   a. f est injective
   b. f n'est pas injective
   c. f est surjective
   d. f n'est pas surjective

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors

   a. f est injective
   b. f n'est pas injective
   c. f est surjective
   d. f n'est pas surjective

4. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors

   a. f est injective
   b. f n'est pas injective
   c. f est surjective
   d. f n'est pas surjective

Exercice 5 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $524x + 144y = 4$.

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $524x+144y = 4$.

Exercice 6 (2 points)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et $d = a \wedge b$.

1. Montrer qu'il existe $(a', b') \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $a = da'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$.

2. Via la question précédente et le théorème de Bézout, montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = d$.

Exercice 7 (2 points)

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$.

Exercice 8 (3 points)

Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que le polynôme $P(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $Q(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ par
   a. $(X-2)(X-1)$

   b. $(X-1)^2$

Exercice 9 (2 points)

Pour quelle(s) valeur(s) du réel a le polynôme $Q(X) = (X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine réelle au moins double ?