

# Partiel 1

Durée : trois heures  
Documents et calculatrices non autorisés

Nom :

Prénom :

Classe :

Consignes :

- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

## Exercice 1 (4 points)

Écrire la négation des phrases suivantes :

1. « Aucun diplômé de l'EPITA n'aura un premier salaire brut annuel en dessous de 40 k€ ».

2. « Si j'intègre le laboratoire de recherche de l'EPITA, je pourrai m'orienter vers l'imagerie médicale ».

3. « Certains MiMo sont compliqués ».

4. « Tous vos gestes sur IONISx sont analysés ».

## Exercice 2 (2 points)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

[suite du cadre page suivante]

### Exercice 3 (2 points)

Écrire en langage mathématique (avec les quantificateurs) les phrases suivantes (ne pas se préoccuper de la validité des phrases, certaines peuvent être vraies et d'autres fausses) :

1. « Tout réel est le cube d'un réel ».

2. « Il existe un réel qui est le cube de tout réel ».

3. « Tout entier naturel est pair ou impair ».

4. « Entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un rationnel ».

### Exercice 4 (2 points)

Dans chacune des questions suivantes, ENTOURER les bonnes réponses.

1. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ . Alors

- a.  $f$  est injective
- b.  $f$  n'est pas injective
- c.  $f$  est surjective
- d.  $f$  n'est pas surjective

2. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ . Alors

- a.  $f$  est injective
- b.  $f$  n'est pas injective
- c.  $f$  est surjective
- d.  $f$  n'est pas surjective

3. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ . Alors

- a.  $f$  est injective
- b.  $f$  n'est pas injective
- c.  $f$  est surjective
- d.  $f$  n'est pas surjective

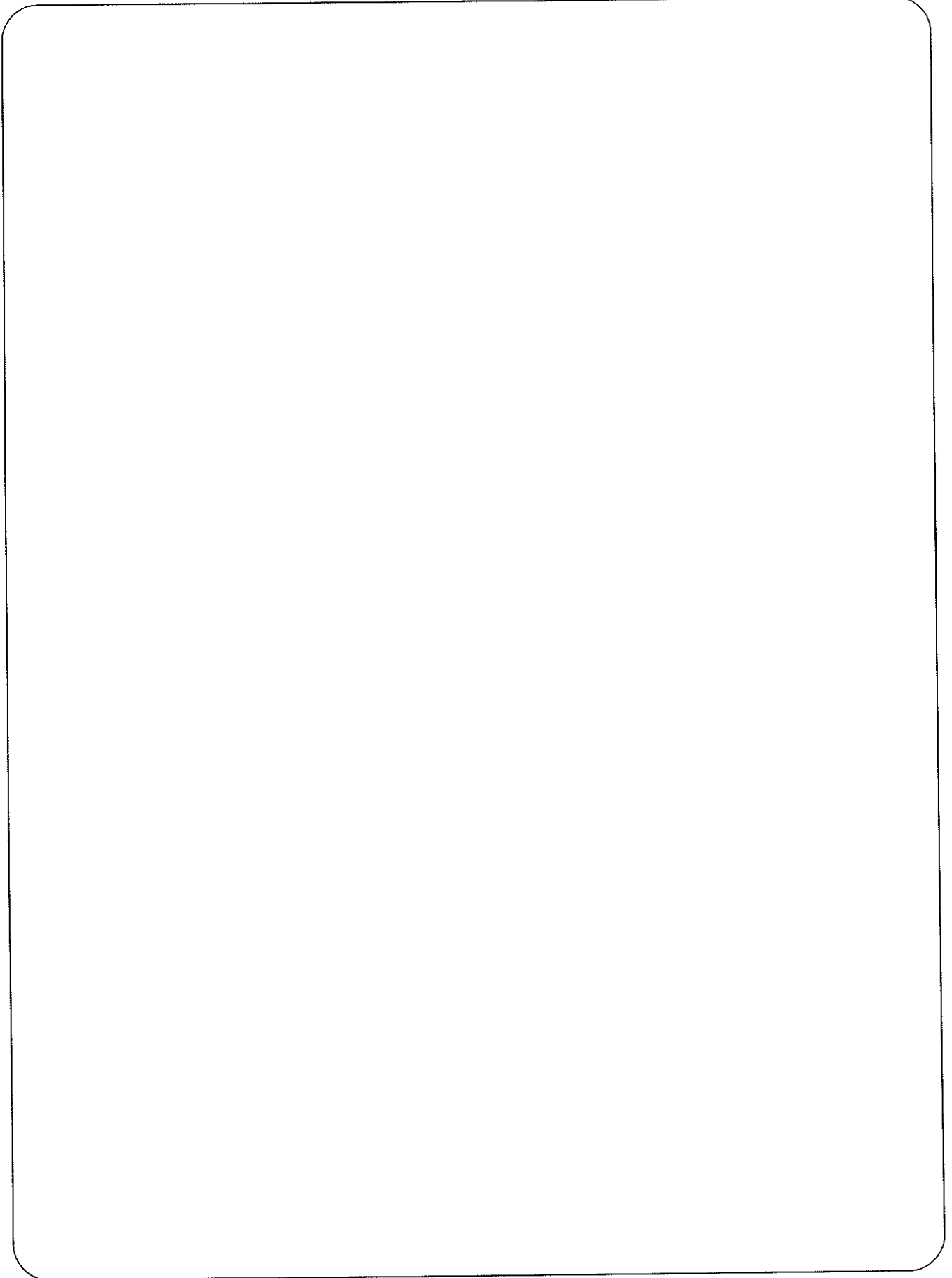
4. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ . Alors

- a.  $f$  est injective
- b.  $f$  n'est pas injective
- c.  $f$  est surjective
- d.  $f$  n'est pas surjective

### Exercice 5 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation  $524x + 144y = 4$ .

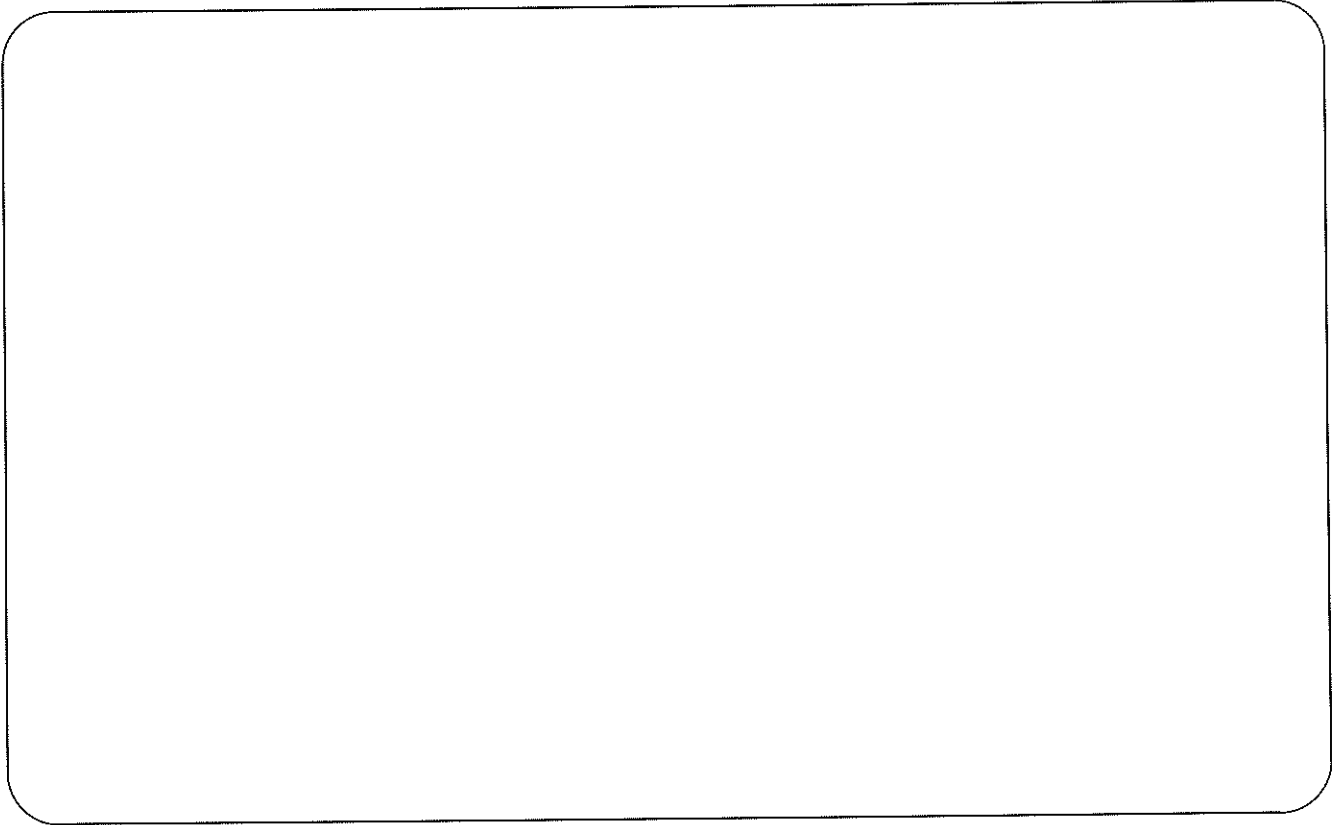
2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $524x + 144y = 4$ .



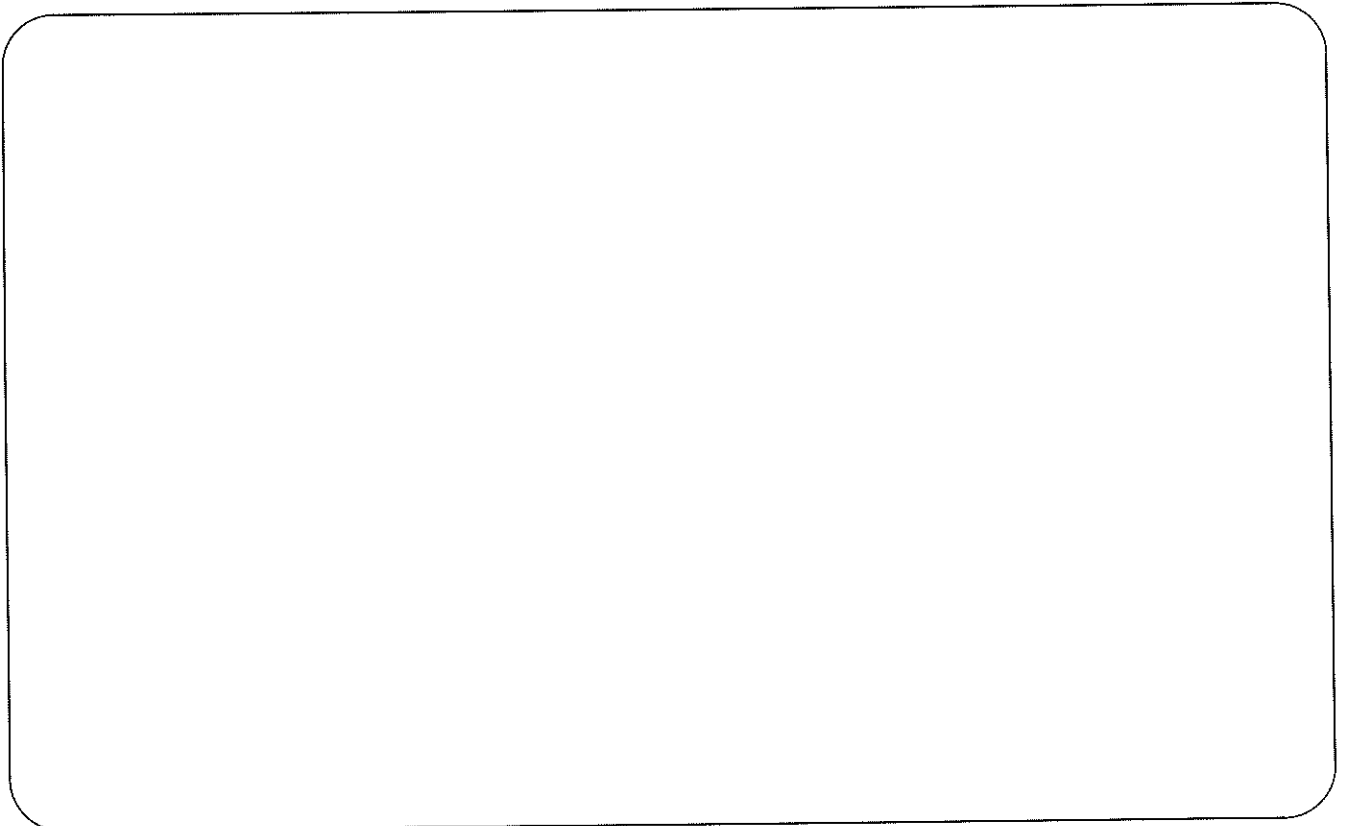
## Exercice 6 (2 points)

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls et  $d = a \wedge b$ .

1. Montrer qu'il existe  $(a', b') \in \mathbb{N}^{*2}$  tel que  $a = da'$ ,  $b = db'$  et  $a' \wedge b' = 1$ .

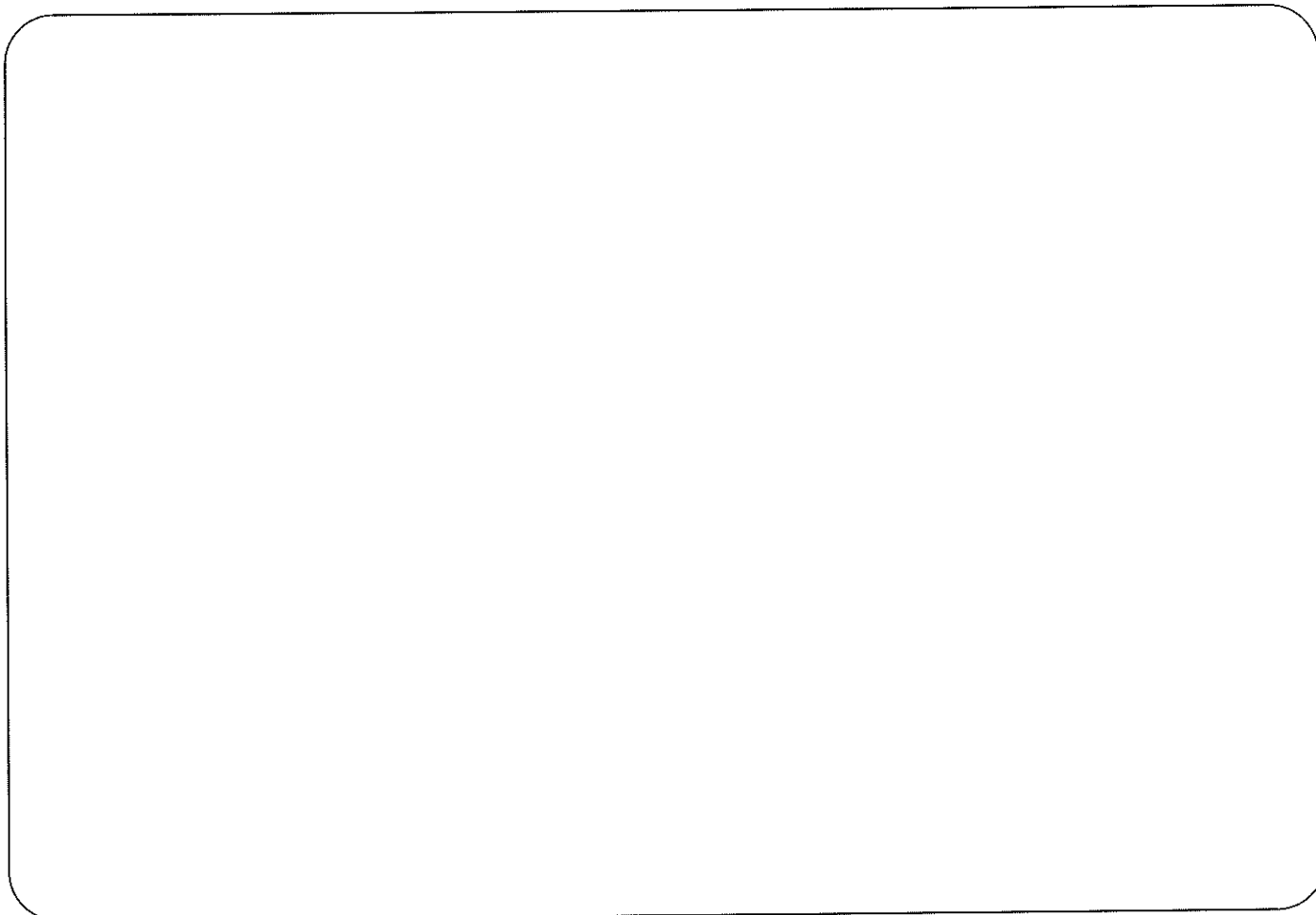


2. Via la question précédente et le théorème de Bézout, montrer qu'il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $au + bv = d$ .



### Exercice 7 (2 points)

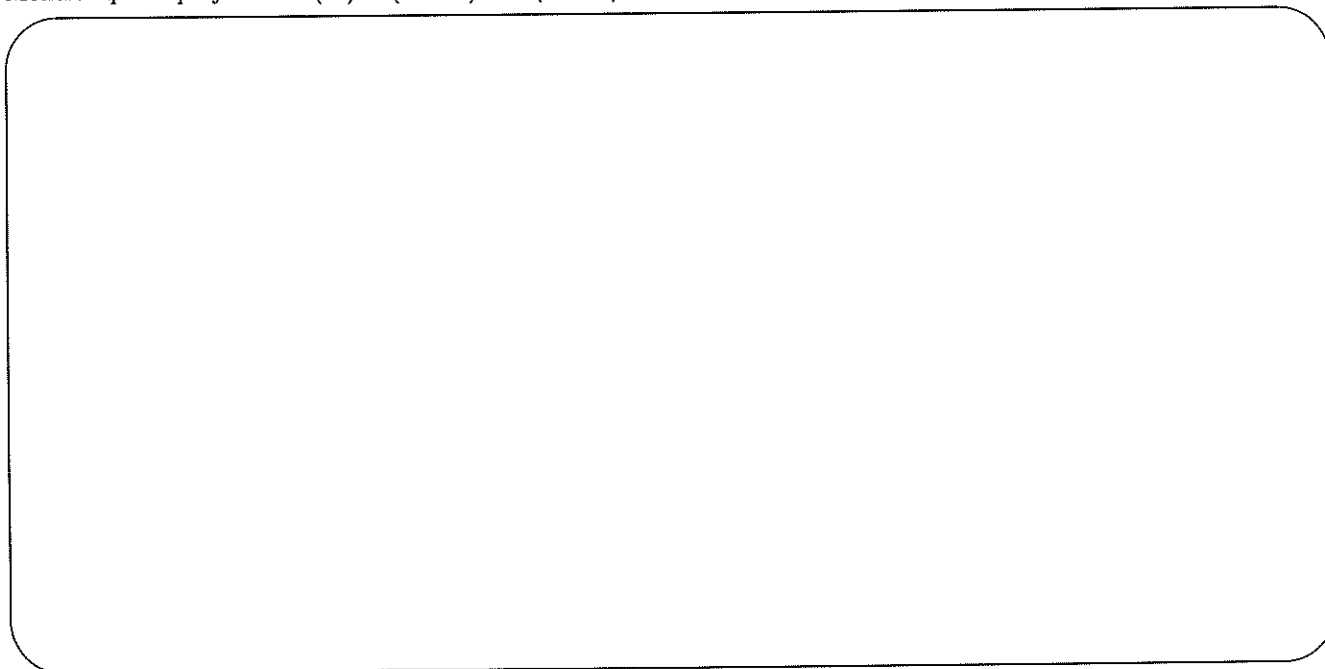
Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme  $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ .



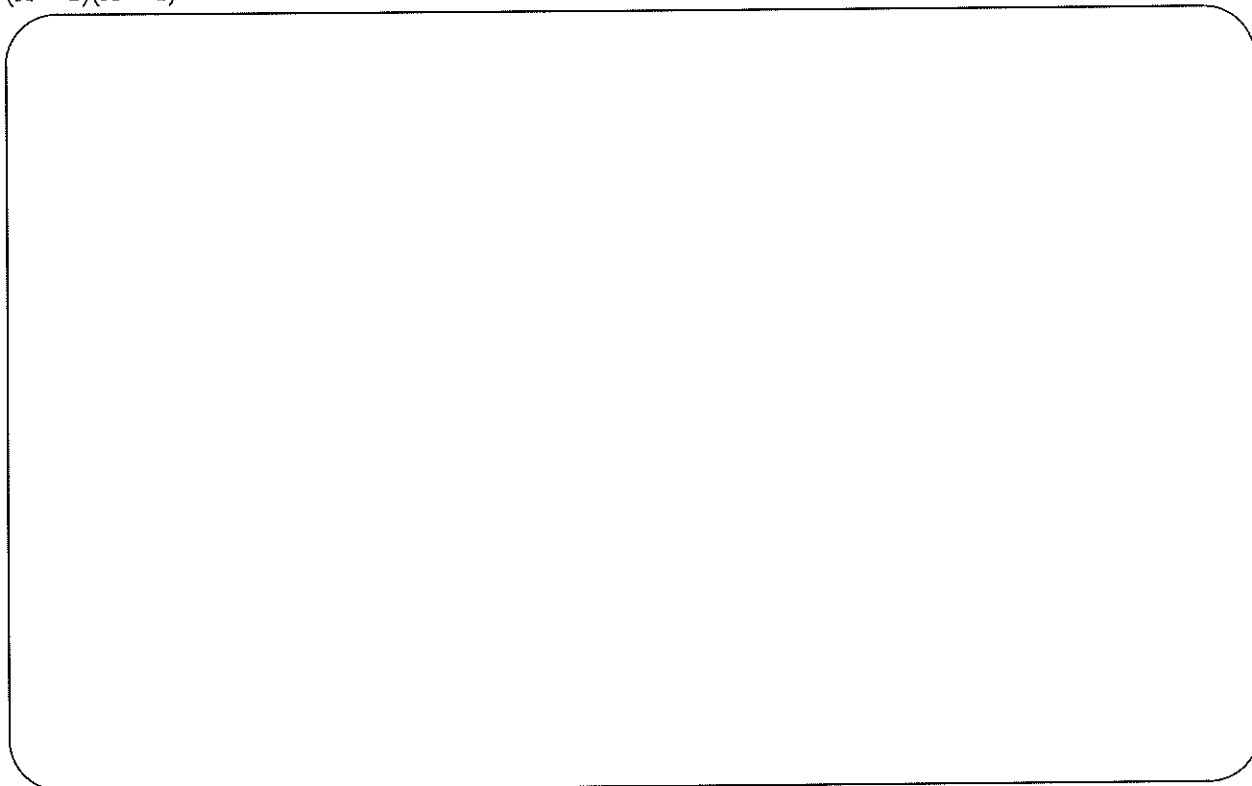
### Exercice 8 (3 points)

Soit  $n \geq 2$ .

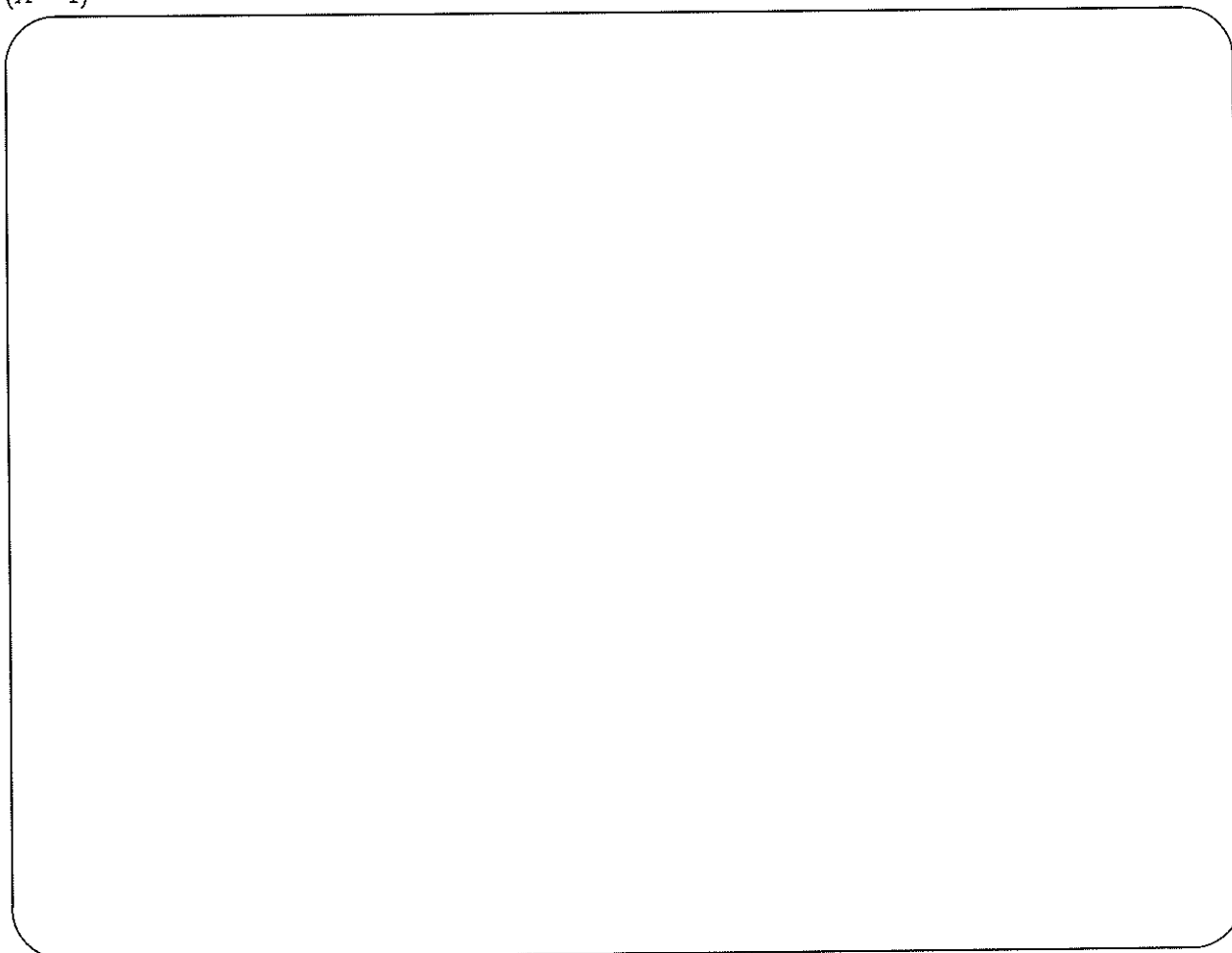
1. Montrer que le polynôme  $P(X) = (X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 1$  est divisible par  $X^2 - 3X + 2$ .



2. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $Q(X) = (X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 2$  par
- a.  $(X - 2)(X - 1)$



- b.  $(X - 1)^2$



### Exercice 9 (2 points)

Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $a$  le polynôme  $Q(X) = (X + 1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine réelle au moins double ?