Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : ..... **Prénom :** ..... **Classe :** .....

N.B. :

- **Ce contrôle comporte deux parties distinctes associées aux ECUE OBM et DP. Chaque partie est calibrée pour durer 30 minutes mais c'est à vous de gérer votre temps.**
- **Chacune des deux parties est sur 20 points. Il y aura deux notes distinctes.**

1 Contrôle de cours sur l'ECUE OBM (durée : 30 minutes). Note OBM : .... /20

Cours 1 : sur la logique (8,5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Écrire les phrases suivantes à l'aide des quantificateurs :

   « Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme de deux entiers naturels » : .....

   « Il n'y a pas de réel strictement plus grand que π » : .....

   « Certains entiers naturels sont multiples de 3 » : .....

2. Soient $x \in \mathbb{R}$. Mettre le symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés :

   (a) $\sqrt{x^2+1} > 2$ .... $\sqrt{x^2+1} \geq 2$ (b) $(x-2)(x-1) > 0$ .... $x > 2$ (c) $\sin(x) > 0$ .... $x \in]0, \pi[$

   (d) $\sqrt{x^2} = 2$ .... $x = 2$ (e) $2x + 1 = 0$ .... $x = -\dfrac{1}{2}$ (f) $x > e$ .... $\ln(x) \geq 0$

3. Dans la colonne de gauche du tableau ci-dessous, il y a une assertion qui commence par des pointillés. Mettre alors une croix dans toutes les autres cases où l'assertion est vraie en remplaçant les pointillés par le symbole $\forall$ ou le symbole $\exists$. Si on ne peut mettre aucun de ces deux symboles, mettre alors une croix dans la dernière colonne. Vous avez deux exemples pour vous aider.

	$\forall$	$\exists$	aucun des deux symboles
.... $x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert > 1$		x	
.... $x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert < 0$			x
.... $x \in \mathbb{R},\ \cos(x) < 1$			
.... $x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 0$			
.... $x \in \mathbb{R},\ 2x + 3 = 1$			
.... $x \in \mathbb{R},\ x^2 = -2$			
.... $x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 < y$			

4. On considère l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x > 15 \Longrightarrow \dfrac{x-3}{6} \geq 1\right)$ »

   (a) Cette assertion est-elle vraie ou fausse ? Rédiger correctement.

   .....

   .....

   .....

   .....

   (b) Écrire sa négation.

   .....

   .....

   (c) Écrire sa contraposée.

   .....

   .....

Cours 2 : sur les ensembles (3 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Écrire en compréhension l'ensemble E des fonctions réelles qui ne s'annulent jamais et F l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent comme le carré d'un entier naturel :

   .....

   .....

2. On considère les ensembles $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ 8 < x \leq 15\}$.

   (a) De quel ensemble de référence commun A et B sont-ils deux sous-ensembles ? réponse : .....

   (b) Dans chacune des phrases suivantes, remplacer les pointillés afin de la rendre vraie (remplacer les pointillés par $\emptyset$ ou par l'ensemble mis en jeu est interdit).

   Exemple : pour ..... $\in A$, on peut remplacer les pointillés par 11 *car* $11 \in A$.

   (a) ..... $\subset A$ (b) ..... $\notin A \cup B$ (c) ..... $\subset A \cup B$ (d) ..... $\in A \cap B$
   (e) ..... $\subset A \times B$.

   (f) ..... $\in \mathcal{P}(A)$ g) $(15, 10) \in$ ..... h) ..... $\in A \cap (\mathbb{R} \setminus B)$

Cours 3 : sur les fonctions (8,5 points)

1. Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $F = [\![1, 5]\!]$ et $f : E \longrightarrow F$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

   (a) Rappeler les définitions mathématiques de $f(A)$, $f^{-1}(B)$, f injective de E vers F et f surjective de E vers F.

   $f(A) =$ ..... et $f^{-1}(B) =$ .....

   f injective de E vers F : .....

   f surjective de E vers F : .....

(b) Dessiner (graphe, patates) f dans le cas où $f(\{a,c\}) = \{1,2\}$ et $f^{-1}(\{2,5\}) = \{b,c\}$.

(c) La fonction que vous avez dessiné est-elle injective ? surjective ? Justifier.

.....

.....

.....

.....

2. Soit $f : x \longmapsto 3x - 4$. On admet que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Trouver f^{-1}.

.....

.....

.....

.....

.....

2 Contrôle de cours sur l'ECUE DP (durée : 30 minutes). Note DP : ..../20

Cours 1 : dénombrement 1 (6 points)

Un cadenas est protégé par un code à 5 chiffres, chaque chiffre pouvant être choisi dans $E = [\![0,9]\!]$. Compléter la fin des 4 premières phrases et répondre à la 5-ième :

1. Le nombre de codes avec des chiffres quelconques est égal à : .....
2. Le nombre de codes ayant 5 chiffres différents est égal à : .....
3. Le nombre de sous-ensembles de E est égal à : .....
4. Le nombre de codes ayant 2 zéros (exactement) et trois autres chiffres différents est égal à : ...
5. Alice veut ouvrir le cadenas. Elle sait juste que le code contient un 1, un 8 et trois 7. Combien au maximum Alice peut-elle faire de codes pour ouvrir le cadenas ? Justifier brièvement.

.....

.....

.....

Cours 2 : dénombrement 2 (10,5 points)

Soit E un ensemble de cardinal 7. Soit $k \in [\![0, 7]\!]$.

1. Que comptez-vous si vous calculez $\binom{7}{k}$? Donner son expression avec les factorielles.

   .....

   .....

   .....

2. (a) Calculer le nombre N_1 de sous-ensembles de E ayant 4 éléments. Vos calculs doivent être détaillés et simplifiés.

   .....

   .....

   .....

   .....

   (b) Calculer le nombre N_2 de 4-uplets d'éléments distincts de E. Vous l'exprimerez aussi à l'aide de factorielles.

   .....

   .....

   .....

   .....

   (c) Exprimer N_1 en fonction de N_2 via les factorielles.

   .....

3. (a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner la formule du binôme de Newton.

   .....

   .....

   (b) Calculer $N = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k}$ en utilisant la formule précédente. Que compte-t-il concrètement ?

   .....

   .....

   .....

4. Entourer les formules vraies (attention : points négatifs pour une formule fausse entourée)

   a) $\binom{7}{0} = \binom{7}{1}$ *b)* $\binom{7}{1} = \binom{7}{6}$ *c)* $\binom{7}{2} = \binom{7}{6}$ *d)* $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$

Cours 3 : probabilités (3,5 points)

Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tels que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{B}) = \frac{1}{5}$ et $P(A \mid B) = \frac{3}{10}$.
Vous donnerez vos résultats sous la forme d'une **fraction simplifiée**.

1. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(B \mid A)$ en mettant en évidence les formules du cours.

   .....

   .....

   .....

   .....

2. Après avoir rappelé la formule générale, calculer $P(A \cup B)$.

   .....

   .....

   .....

   .....